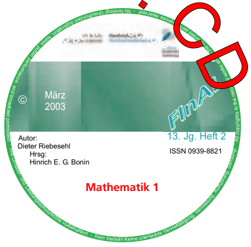
University of Applied Sciences

Fachhochschule Nordostniedersachsen

Lüneburg
Buxtehude
Suderburg

Arbeitsberichte aus der Informatik

Incl. CD



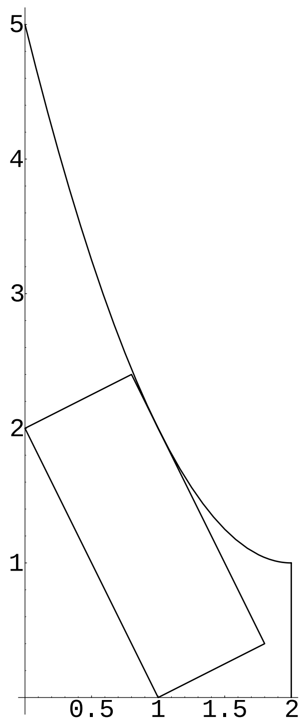
FInAL
Fachhochschule Nordostniedersachsen
Informatik
Arbeitsberichte
Lüneburg

Mathematik 1

Dieter Riebesehl

13. Jahrgang, Heft 2, März 2003, ISSN 0939-8821
Technical Reports and Working Papers
Hrsg: Hinrich E. G. Bonin
Volgershall 1, D-21339 Lüneburg
Phone: xx49.4131.677175 Fax: xx49.4131.677140

Mathematik I



Prof. Dr. Dieter Riebesehl

24. Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Cremers, Heinz. Mathematik und Stochastik für Banker. Bankakademie Verlag GmbH 1999

[2] Beckmann, M. J., Künzi, H. P. Mathematik für Ökonomen I, II. Springer Verlag, 1973

[3] Brill, Manfred. Mathematik für Informatiker. Hanser 2001

[4] Garus, G., Westerheide, P. Differential- und Integralrechnung. Hanser, 1985

[5] Graham, Knuth, Patashnik. Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science. Addison-Wesley 1995

[6] Hülsmann, Gamerith, Leopold-Wildburger, Steindl. Einführung in die Wirtschaftmathematik. Springer 1999

[7] Köhler, H. Lineare Algebra. Carl Hanser Verlag, 2. Auflage.

[8] Pfuff, F. Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. 3 Bände. Vieweg, 1982

[9] Stöppler, S. Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Gabler, 1963

[10] Schwarze, J. Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.
Band 1: Grundlagen
Band 2: Differential- und Integralrechnung
Verlag Neue Wirtschaftsbriefe, 1974

[11] Tietze, J. Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik. Vieweg, 1992

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden grundlegende Definitionen, Bezeichnungen und Regeln zusammengestellt und Zahlsysteme vorgestellt.

1.1 Zahlen

Wir verwenden folgende Bezeichnungen für Mengen von Zahlen:

- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ steht für die Menge der *natürlichen* Zahlen,
- $\mathbb{Z} := \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \ldots\}$ für die Menge der *ganzen* Zahlen,
- $\mathbb{Q} := \{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 4, \ldots\}$ für die Menge der *rationalen* Zahlen (Brüche), Powerpoint 3
- $\mathbb{R}$ für die Menge der *reellen* Zahlen, d.h.

$$0, 1, \frac{3}{7}, \sqrt{2}, \pi, \ldots \in \mathbb{R}.$$

Auf diesen Mengen von Zahlen sind die üblichen Rechenoperationen definiert. Dabei gilt:

1. In $\mathbb{N}$ sind Addition und Multiplikation unbeschränkt ausführbar,
2. in $\mathbb{Z}$ ist zusätzlich die Subtraktion unbeschränkt ausführbar, und
3. in $\mathbb{Q}$ ist auch die Division unbeschränkt ausführbar mit Ausnahme der Division durch Null.

Die Menge $\mathbb{R}$ läßt sich so nur schwer charakterisieren, in ihr lassen sich in gewissem Sinne unbeschränkt Grenzwerte finden (siehe Kapitel 2.2.1.)

Es gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Powerpoint 2

Bemerkung: Die Elemente der Menge $\mathbb{Q}$ sind oben auf systematische Weise aufgezählt worden – können Sie herausfinden, wie?
Die Menge $\mathbb{R}$ enthält anschaulich gesagt alle unendlich langen Dezimalbrüche.

Die Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nennt man *irrationale* Zahlen, weil sie sich nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen lassen.

1.2 Endliche Summen

Zur Bezeichnung mathematischer Größen verwendet man u.a. indizierte Variable, d.h. Buchstaben, denen eine kleine tiefgestellte *natürliche* oder *ganze* Zahl angehängt ist, der Index. Dadurch ist der Vorrat an Variablennamen praktisch unerschöpflich. Der Index darf selbst auch wieder eine Zahlvariable, also ein Buchstabe sein, oder sogar ein arithmetischer Ausdruck, der allerdings immer eine ganze Zahl ergeben muss, wenn die Variablen darin durch ihre Werte ersetzt werden.

Beispiele:

$$a_1, a_2, b_0, z_{-3}, \ldots, z_{999}, M_3, f_k, g_{n+2}, \ldots \text{ usw.}$$

Unerlaubte Indizes hingegen sind:

$$a_{\sqrt{2}}, b_{\frac{1}{2}}, \ldots \text{ usw.}$$

Powerpoint 4

Definition 1.2.1 *Zur verkürzten Schreibweise von Summen verwendet man das Summenzeichen:*

$$\sum_{i=n}^{m} a_i := a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{m-1} + a_m.$$

mit $n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \leq m$. n *heißt* untere, m obere Summationsgrenze, i *ist der* Summationsindex, *die* a_i *heißen* Summenglieder.

Powerpoint 5,6

Satz 1.2.2 *Für das Rechnen mit Summenzeichen gelten folgende Rechenregeln:*

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{m} a_i &= \sum_{j=n}^{m} a_j \quad \textit{(Indexumbenennung)}\ , \\ \sum_{i=n}^{m} a_i &= \sum_{i=n-l}^{m-l} a_{i+l} \quad \forall l \in \mathbb{Z} \quad \textit{(Indexverschiebung)}\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{k} a_i &= \sum_{i=n}^{k} a_i, \quad \textit{sofern } n \leq m < k,\\
\sum_{i=n}^{m} a_i + \sum_{i=n}^{m} b_i &= \sum_{i=n}^{m} (a_i + b_i),\\
\sum_{i=n}^{m} c \cdot a_i &= c \cdot \sum_{i=n}^{m} a_i \quad \forall c \in \mathbb{R}.\\
\sum_{i=n}^{m} a_i \cdot \sum_{j=l}^{k} b_j &= \sum_{i=n}^{m} \sum_{j=l}^{k} a_i b_j
\end{aligned}$$

Satz 1.2.3 *Einige Summen lassen sich durch einen geschlossenen Ausdruck berechnen:*

Powerpoint 7,8

$$\sum_{i=1}^{m} a = m \cdot a \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=n}^{m} a = (m - n + 1) \cdot a \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} n+1 & \textit{für } q = 1 \\ \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \textit{für } q \neq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot q^i = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} & \textit{für } q = 1 \\ \dfrac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(q-1)^2} & \textit{für } q \neq 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \tag{1.7}$$

Beweis von 1.3:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{n} i & = & 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \\
\sum_{i=1}^{n} i & = & n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \\
\hline
2\sum_{i=1}^{n} i & = & (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) \\
& = & n(n+1)
\end{array}$$

Beweis von 1.5:

Für $q \neq 1$ gilt

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=0}^{n} q^i & = & 1+q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n \\
q\sum_{i=0}^{n} q^i & = & q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} \\
\hline
(q-1)\sum_{i=1}^{n} q^i & = & q^{n+1} - 1
\end{array}$$

Beispiel zur Anwendung von 1.3:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=10}^{100} 3i + 2 &= 3\sum_{i=10}^{100} i + \sum_{i=10}^{100} 2 = 3\left(\sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^{9} i\right) + 2(100 - 10 + 1) \\
&= 3\left(\frac{100 \cdot 101}{2} - \frac{9 \cdot 10}{2}\right) + 182 = 3(5050 - 45) + 182 \\
&= 15197.
\end{aligned}$$

Beispiel zur Anwendung von 1.5:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} 2^n &= 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k \\
&= \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2^{k+1} - 1
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Summen 1.1 und 1.2 sind trivial, aber wichtig, die Summen 1.5 und 1.6 haben vielfältige Anwendungen u.a. in der Statistik und Zinseszinsrechnung. 1.7 hat kaum praktischen Nutzen, dient aber später als nützliches Beispiel.

Eine wichtige Anwendung von endlichen Summen sind die binomischen Formeln. Sie drücken Potenzen von Summen als eine Summe von Potenzprodukten aus, d.h. für $a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ gilt[1]

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Hierbei sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$ für $n, i \in \mathbb{N},\ 0 \le i \le n$, definiert durch

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{i} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \text{ für } 1 \le i.$$

Die Binomialkoeffizienten lassen sich im Pascalschen Dreieck anordnen:

							$i =$		0		1		2		3		...
n								$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$	
0							1										
1						1		1									
2					1		2		1								
3				1		3		3		1							
4			1		4		6		4		1						
5		1		5		10		10		5		1					
6	1		6		15		20		15		6		1				

Hierin ist jede Zahl die Summe der beiden links und rechts darüber stehenden, d.h. es gilt

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}.$$

1.2.1 Exkurs über Kombinatorik

Die gerade eingeführten Binomialkoeffizienten treten bei einer Vielzahl von Abzählungsproblemen auf. Sie lassen sich mit Hilfe der Fakultätsfunktion definieren, wie bereits oben geschehen:

$$0! := 1, \qquad (n+1)! := (n+1)\cdot n! \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Es sei eine Menge M von n verschiedenen Elementen gegeben. Da es auf die genaue Natur der Elemente von M nicht ankommen soll, kann man standardmäßig

[1] und nach dem Korrespondenzprinzip natürlich auch in $\mathbb{R}^*$

$M = \{1, 2, 3, \ldots n\}$ wählen. Bestimmte Mengen von Tupeln oder Teilmengen von Elementen aus M sind in der Kombinatorik wichtig:

Definition 1.2.4 *Eine*

Powerpoint 9

k-**Permutation** *ist ein geordnetes Tupel von k* verschiedenen *Elementen aus M für $0 \leq k \leq n$;*

Permutation *ist speziell eine n-Permutation;*

Powerpoint 13

k-**Permutation mit Wiederholung** *ist eine k-Permutation, in der nicht alle Elemente verschieden sein müssen;*

Powerpoint 10

k-**Kombination** *ist eine k-elementige Teilmenge von M, $0 \leq k \leq n$;*

Powerpoint 11,12

k-**Kombination mit Wiederholung** *ist ein k-elementiges Tupel von Elementen aus M, wobei nicht alle Elemente des Tupels verschieden sein müssen* und *die Reihenfolge der Elemente im Tupel keine Rolle spielt.*

Man nennt eine k-Kombination mit Wiederholung auch eine Multimenge. Sie hat mit Mengen gemeinsam, dass die Elemente ungeordnet sind, darf aber im Gegensatz zu Mengen manche Elemente mehrfach enthalten. Deshalb ist $k > n$ möglich.

Über die Anzahlen der verschiedenen Permutationen und Kombinationen gibt Auskunft

Satz 1.2.5 *Es gibt*

$$\begin{aligned}
n^{\underline{k}} &:= n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \\
&\quad\ k\text{-Permutationen,} \\
n! &:= n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 \\
&\quad\ \text{Permutationen,} \\
n^k & \quad\ k\text{-Permutationen mit Wiederholung} \\
\binom{n}{k} &:= \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&\quad\ k\text{-Kombinationen,} \\
\binom{n+k-1}{k} &=: \frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} \\
&\quad\ k\text{-Kombinationen mit Wiederholung.}
\end{aligned}$$

Nur die letzte Aussage soll plausibel gemacht werden. Eine 5-Kombination mit Wiederholung aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ ist z.B. die Multimenge $\{1, 2, 1, 3, 2\}$. Da die Anordnung unwichtig ist, kann man die Multimenge auch durch die Häufigkeiten, mit denen die Elemente aus M auftauchen, charakterisieren, hier also durch

$$2\times\ 1,\ 2\times\ 2,\ 1\times\ 3,\ 0\times\ 4.$$

Noch kürzer ist die Auflistung der Anzahlen „2,2,1,0“, die man ohne Zahlen auch durch „$|\cdot\cdot|\cdot\cdot|\cdot||$“ beschreiben kann: jeder Punkt $\cdot$ steht für ein Element, jeder Strich $|$ steht für den Wechsel zum nächsten Element. Der Strich am Anfang und am Ende ist eigentlich überflüssig, so dass „$\cdot\cdot|\cdot\cdot|\cdot|$“ übrigbleibt. Dies sind $8=n+k-1$ Symbole, von denen genau k Punkte sind. Jede k-Kombination mit Wiederholung entspricht also eineindeutig einem solchen $n+k-1$ Zeichen langen Muster von Punkten und Strichen mit genau k Punkten. Ein solches Muster ist beschreibbar durch die Position der Punkte, d.h. durch eine k-Kombination aus den Zahlen 1 bis $n+k-1$ (im Beispiel durch „1,2,4,5,7“).
■

1.2.2 Aufgaben


Mit diesem Zeichen sind schwierigere Aufgaben gekennzeichnet, die eine längere Rechnung oder neue Überlegungen erfordern. Sie können beim ersten Lesen übergangen werden.

Aufgabe 1.1 : Berechnen Sie die folgenden Summen:

$$\text{a)}\quad \sum_{i=-1}^{2}\frac{i}{i+2},\quad \text{b)}\quad \sum_{k=2}^{5}k(-1)^k,\quad \text{c)}\quad \sum_{i=1}^{k}\frac{1+2^i}{3^i}.$$

Aufgabe 1.2 : Schreiben Sie als eine Summe:

$$\text{a)}\quad \sum_{i=n}^{m}2^{2i-4}-\sum_{i=n-2}^{m-2}4^{i+1},\quad \text{b)}\quad \sum_{m=1}^{4}\frac{m}{m+1}+\sum_{m=2}^{5}\frac{1}{m}$$

Aufgabe 1.3 : Ergänzen Sie in den folgenden Gleichungen die durch ? besetzten Stellen:

$$\text{a)}\qquad \sum_{i=1}^{5}2\cdot i^2=\sum_{k=0}^{?}?$$

$$\text{b)}\qquad \sum_{k=-2}^{3}\frac{1}{k+3}=\sum_{n=?}^{?}\frac{1}{n}$$

$$\text{c)}\qquad \sum_{m=?}^{4}a^{2m+?}=\sum_{n=1}^{6}a^{2n+7}$$

Aufgabe 1.4 : Die Zahlen $a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, seien definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < j \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} & \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechnen Sie

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Aufgabe 1.5 : Schreiben Sie die binomischen Formeln für $(a-b)^2$ und $(a+b)^7$ aus.

Aufgabe 1.6 : Beweisen Sie:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Aufgabe 1.7 : Eine Fachbereichskommission ist mit 3 Mitgliedern des 12 Personen umfassenden Fachbereichsrats zu besetzen. Wieviele mögliche Zusammensetzungen der Kommission gibt es?

Aufgabe 1.8 : Vereinfachen Sie

$$\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

Aufgabe 1.9 : Jemand bringt von der Eisbude 6 Eistüten mit je einer Kugel mit.

1. Auf wieviele Weisen ist das möglich, wenn die Eisbude 10 Sorten Eis anbietet?
2. 6 Kinder greifen sich wahllos eine der 6 Eistüten. Wieviele Möglichkeiten der Verteilung von Sorten auf Kinder gibt es?

Aufgabe 1.10 : Zeigen Sie

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

1.3 Eigenschaften der natürlichen Zahlen

Da sich auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ die Division nicht immer durchführen läßt, führt man für $m \neq 0$ die ganzzahlige Division ein,

$$n \backslash m := \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor .$$

Dabei steht

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

für das Abrunden zur nächsten ganzen Zahl.

Zur ganzzahligen Division gehört der Rest modulo einer ganzen Zahl m, Powerpoint 15

$$n \bmod m := n - m \cdot (n \backslash m).$$

Bemerkung: Diese Definitionen sind so gestaltet, dass für *alle* $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$n \backslash m \leq \frac{n}{m}$$

und

$$0 \leq n \bmod m < m, \text{ falls } m > 0.$$

Es gilt aber *nicht* allgemein

$$(*) \qquad (-n) \backslash m = -(n \backslash m)$$

Gängige Implementierungen in Programmiersprachen weichen hiervon manchmal ab, wenn m oder n negativ sind. Dafür ist dann evtl. (*) erfüllt.

Definition 1.3.1 *Für $m, n \in \mathbb{Z}$ heißt m* Teiler *von n, geschrieben $m|n$, wenn*

$$\frac{n}{m} \in \mathbb{Z} \textit{ ist, d.h. } n \bmod m = 0.$$

m und n heißen relativ prim*, geschrieben $m \perp n$, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler haben, d.h.*

$$d \in \mathbb{N},\ d|m,\ d|n \Longrightarrow d = 1.$$

Der größte gemeinsame Teiler *von m und n ist gegeben durch*

$$\mathrm{ggT}(m, n) := \max\{d \in \mathbb{N} \mid d|m,\ d|n\}.$$

Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt Primzahl*, wenn 1 und p die einzigen Teiler von p sind.* Powerpoint 14

Offenbar ist

$$m \perp n \Longleftrightarrow \mathrm{ggT}(m, n) = 1.$$

Satz 1.3.2 (Fundamentalsatz der Zahlentheorie) *Jede natürliche Zahl $n > 1$ läßt sich als Produkt aus Primzahlpotenzen schreiben, d.h.*

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots p_r^{e_r}$$

mit Primzahlen $p_i, \; i = 1, 2, \ldots r$ und natürlichen Zahlen $e_i > 0, \; i = 1, 2, \ldots r$. Die Darstellung ist eindeutig, wenn man $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ verlangt.

Beispiel: Aus der Primfaktorzerlegung zweier Zahlen läßt sich leicht der ggT bestimmen.

$$\begin{aligned}
21\,420 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 17^1 \\
2\,970 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 &= 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^1 \cdot 17^0 \\
\mathrm{ggT}(21\,420, 2\,970) &= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 17^0 = 90
\end{aligned}$$

Der $\mathrm{ggT}(m, n)$ zweier natürlicher Zahlen läßt sich aber auch bestimmen, ohne die evtl. schwierige Primfaktorzerlegung vornehmen zu müssen. Dazu dient der Euklidische Algorithmus:

- Sorge für $m \geq n$ durch Vertauschen von m und n wenn nötig.
- Setze $a_0 = m, \; a_1 = n$.
- Berechne $q_0 = a_0 \backslash a_1$ und $a_2 = a_0 \bmod a_1 = a_0 - q_0 a_1$.
- Berechne $q_1 = a_1 \backslash a_2$ und $a_3 = a_1 \bmod a_2 = a_1 - q_1 a_2$.
- $\ldots$

Das Verfahren bricht automatisch ab, sobald ein $a_i = 0$ geworden ist. Dann ist

$$\mathrm{ggT}(m, n) = a_{i-1}.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
21\,420 &= 7 \cdot 2\,970 + 630 \\
2\,970 &= 4 \cdot 630 + 450 \\
630 &= 1 \cdot 450 + 180 \\
450 &= 2 \cdot 180 + 90 \\
180 &= 2 \cdot 90.
\end{aligned}$$

1.3.1 Aufgaben

Aufgabe 1.11 : Bestimmen Sie

a) $17302 \bmod 3$ b) $10000 \bmod 7$ c) $10000 \bmod 30$ d) $2^{100} \bmod 5$

Aufgabe 1.12 : Geben Sie die Primfaktorzerlegungen an von

a) $40\,320$ b) $999\,999$ c) $40\,688$

Aufgabe 1.13 : Bestimmen Sie

a) $\mathrm{ggT}(55, 89)$ b) $\mathrm{ggT}(720, 1000)$ c) $\mathrm{ggT}(869, 396)$

1.4 Rechnen mit Restklassen

Mathematica $1.3 - 1.4$

Wenn $n > 1$ irgendeine natürliche Zahl ist, so setzen wir

$$\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Jeder ganzen Zahl $a \in \mathbb{Z}$ wird dann durch

$$\bar{a} := a \bmod n$$

eine Zahl $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ zugeordnet, die Restklasse modulo n. Es ist also immer $0 \leq \bar{a} \leq n-1$.

Definition 1.4.1 *Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen* kongruent modulo n*, wenn $\bar{a} = \bar{b}$ ist, man schreibt*

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Offensichtlich gilt

$$\bar{a} = \bar{b} \iff a \equiv b \pmod{n} \iff n|(a-b) \iff a = b + k \cdot n$$

mit einem geeigneten Faktor $k \in \mathbb{Z}$.

Nun können auf $\mathbb{Z}_n$ eine Addition, Subtraktion und Multiplikation definiert werden durch

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &:= \overline{a+b}, \\ \bar{a} - \bar{b} &:= \overline{a-b}, \\ \bar{a} \cdot \bar{b} &:= \overline{a \cdot b}, \end{aligned}$$

für $a, b \in \mathbb{Z}_n$.

Beispiel: für $n = 6$ erhält man die folgende Multiplikationstafel:

$\times$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Die obige Tabelle zeigt, dass man keine allgemeine Division definieren kann. In $\mathbb{Z}_6$ kann es z.B. keinen Quotienten „$3/2$“ geben, weil 3 kein Vielfaches von 2 ist. Da man durch eine Zahl genau dann dividieren kann, wenn die Zahl einen Kehrwert hat, gibt der folgende Satz Auskunft darüber, durch welche Restklassen man dividieren kann.

Satz 1.4.2 *$\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ hat genau dann ein* Inverses *$\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$, wenn*

$$\mathrm{ggT}(a, n) = 1$$

ist.

Beweis:

1.

$$\bar{a} \cdot \bar{x} = 1 \Longleftrightarrow a \cdot x \equiv 1 \pmod{n} \Longleftrightarrow n|(ax-1) \Longleftrightarrow ax - 1 = q \cdot n$$

für eine passende ganze Zahl q. Damit ist $ax - qn = 1$, und deshalb muss der $\mathrm{ggT}(a, n)$ ein Teiler von 1 sein.

2. Die Umkehrung erfordert die Konstruktion eines passenden x und q, so dass $ax - qn = 1$ ist. Das folgende Verfahren, das parallel zum Euklidischen Algorithmus durchgeführt werden kann liefert allgemein zu $m, n \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{Z}$ mit

$$rm + sn = \mathrm{ggT}(m, n)$$

und löst damit die verlangte Aufgabe:

- Sorge für $m \geq n$ durch Vertauschen von m und n wenn nötig.
- Setze $a_0 = m,\ a_1 = n,\ r_0 = 0,\ s_0 = 1,\ r_{-1} = 1,\ s_{-1} = 0$.
- Berechne $q_0 = a_0 \backslash a_1$ und $a_2 = a_0 \bmod a_1 = a_0 - q_0 a_1$,
  sowie $r_1 = r_{-1} - q_0 r_0,\ s_1 = s_{-1} - q_0 s_0$.

- Berechne $q_1 = a_1 \backslash a_2$ und $a_3 = a_1 \mod a_2 = a_1 - q_1 a_2$, sowie $r_2 = r_0 - q_1 r_1,\ s_2 = s_0 - q_1 s_1$.
- Berechne $q_2 = a_2 \backslash a_3$ und $a_4 = a_2 \mod a_3 = a_2 - q_2 a_3$, sowie $r_3 = r_1 - q_2 r_2,\ s_3 = s_1 - q_2 s_2$.
- $\ldots$

Sobald man ein i erreicht mit $a_{i+2} = 0$, so sind $r = r_i$ und $s = s_i$ die gesuchten Zahlen.

Beispiel: für $\mathrm{ggT}(21\,420, 2\,970)$ erhält man das Schema

i	a_i		q_i		a_{i+1}		a_{i+2}	r_i	s_i
-1								1	0
0	21420	=	7	·	2970	+	630	0	1
1	2970	=	4	·	630	+	450	1	-7
2	630	=	1	·	450	+	180	-4	29
3	450	=	2	·	180	+	90	5	-36
4	180	=	2	·	90			-14	101

In der Tat ist $-14 \cdot 21420 + 101 \cdot 2970 = 90$.

Man schreibt nun

$$\mathbb{Z}_n^* := \{m \in \mathbb{Z}_n \mid \mathrm{ggT}(m,n) = 1\}.$$

In $\mathbb{Z}_n^*$ sind alle vier Grundrechenarten uneingeschränkt ausführbar. Es ist z.B. $\mathbb{Z}_6^* = \{1,5\}$.

Falls p eine Primzahl ist, so gilt

$$\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}.$$

Restklassen erlauben es festzustellen, dass eine Zahl keine Primzahl ist, ohne dass man einen Teiler der Zahl finden muss:

Satz 1.4.3 (kleiner Fermat) *Ist $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, so ist für $a \not\equiv 0 \pmod p$*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

1.4.1 Anwendungen

Von den vielfältigen Anwendungen der Restklassenrechnung sollen einige vorgestellt werden:

Hashing: Beim Abspeichern von Datensätzen in Datenbanken kann die Adresse des Datensatzes aus dem Schlüssel durch *Hashing* berechnet werden. Sollen z.B. Kundenadressen abgespeichert werden, so kann die sechstellige Kundennummer k verwendet werden, um die Speicheradresse a nach der Formel

$$a = k \bmod n$$

mit einer geeigneten Zahl n zu bestimmen. Für z.B. $n = 23$ erhält man für die folgende Sammlung von Kundendaten

Kd.-Nr.	Kd.-Name	...	Adresse
124117	Tödter	...	9
111124	Iltis	...	11
111123	Isidor	...	10
101123	Asbach	...	15
101124	Altus	...	16
111106	Infing	...	16
117106	Offert	...	13
117115	Aumann	...	7
102105	Bertel	...	8
104117	Dorn	...	19
101116	Anning	...	8
107117	Goede	...	6
123117	Soest	...	21

Powerpoint 16

die angegebenen Adressen. Von den 23 möglichen Speicherplätzen bleiben 12 *unbelegt*, und es treten zwei *Kollisionen* auf, d.h. mehrfach belegte Speicherplätze. Beides ist sowohl unerwünscht als auch unvermeidbar. In gewissem Maße kann durch gute Wahl des Moduls n gegengesteuert werden.

Zufallszahlen: Zufallszahlen werden gerne nach der *Divisionsrestmethode* erzeugt. Aus der letzten erzeugten Zufallszahl r_i wird die nächste r_{i+1} mit der Formel

$$r_{i+1} = ar_i \bmod b$$

erzeugt. Mit dem Startwert $r_0 = 3$ und $a = 3427,\ b = 10007$ erhält man die Zahlenfolge

$$r_1 = 274,\ r_2 = 8347,\ r_3 = 5163,\ \ldots$$

ISBN-Nummern zur Kennzeichnung von Büchern etc. bestehen aus 9 Ziffern $a_{10} \ldots a_2$ und einer Prüfziffer a_1,

$$a_{10} - a_9 a_8 a_7 - a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 - a_1.$$

Die Prüfziffer wird dabei so bestimmt, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{10} i \cdot a_i \equiv 0 \pmod{11}.$$

(Falls $a_1 = 10$ ist, so setzt man $a_1 = \mathrm{X}$.)

Dadurch lassen sich Ziffernvertauschungen und einzelne falsche Ziffern entdecken. Powerpoint 17

EAN-Nummern sind zwölfstellig mit einer angehängten Prüfziffer p. Die Prüfziffer wird so bestimmt, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{6} (a_{2i-1} + 3a_{2i}) + p \equiv 0 \pmod{10}.$$

1.4.2 Aufgaben

Aufgabe 1.14 : Stellen Sie die Multiplikationstabelle für $\mathbb{Z}_7$ auf.

Aufgabe 1.15 : Lösen Sie die Kongruenzen

a) $13x \equiv 1 \pmod{17}$
b) $13x \equiv 2 \pmod{17}$
c) $15x \equiv 6 \pmod{21}$

Aufgabe 1.16 : Welche Menge ist $\mathbb{Z}_{15}^*$?

Aufgabe 1.17 : Prüfen Sie die Richtigkeit des kleinen Satzes von Fermat nach für a) $p = 5,\ a = 3$ und für b) $p = 11,\ a = 2$.

Aufgabe 1.18 : Zeigen Sie mit dem kleinen Fermatschen Satz, dass 65 keine Primzahl ist.

Aufgabe 1.19 : Ist 9783446217332 eine korrekte EAN-Nummer?

Aufgabe 1.20 : Zeigen Sie, dass alle Vertauschungen zweier Ziffern in einer ISBN entdeckt werden.

1.5 Die Topologie der reellen Zahlen

Dieser Abschnitt klärt, was es heißt, dass zwei Zahlen in $\mathbb{R}$ einander benachbart sind. Dazu benötigt man Ungleichungen, Absolutbeträge und Intervalle:

$|a|$ bezeichnet den Absolutbetrag (oder einfach Betrag) einer reellen Zahl und ist definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Powerpoint 18

Intervalle sind bestimmte Mengen von Zahlen. Dabei werden die Symbole[2] ∞ und $-\infty$ in besonderer Weise benutzt. Für zwei reelle Zahlen a und b definiert man

abgeschlossene Intervalle:

$$[a, b] := \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x \leq b\}$$

oder

$$(-\infty, b] := \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq b\}$$

oder

$$[a, \infty) := \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x\}$$

offene Intervalle:

$$(a, b) := \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x < b\}$$

oder

$$(-\infty, b) := \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } x < b\}$$

oder

$$(a, \infty) := \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x\}$$

halboffene Intervalle:

$$(a, b] := \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x \leq b\}$$

oder

$$[a, b) := \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x < b\}$$

Auf die folgenden Rechenregeln für Ungleichungen und Beträge sei hingewiesen:

1. Aus $a < b$ folgt $a \pm c < b \pm c$ für alle $c \in \mathbb{R}$,
2. aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$, aber
   aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $a \cdot c > b \cdot c$,

[2]gelesen: „unendlich“ bzw. „minus unendlich“

3. aus $0 < a < b$ folgt $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$, aber

   aus $a < 0 < b$ folgt $\dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{b}$, und

4. für jede reelle Zahl a gilt $a^2 \geq 0$.

5. $|-a| = |a|$,

6. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,

7. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$,

8. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (*Dreiecksungleichung*).

Nachbarschaften einer Zahl s sind über Intervalle definiert, die a enthalten. Man nennt

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| |x - a| < \varepsilon\right\}$$

die ε-Umgebung von a.

1.5.1 Aufgaben

Aufgabe 1.21 : Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b < 0$ gegeben. Welche Ungleichungen gelten für $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$?

Aufgabe 1.22 : Seien zwei Zahlen a, b mit $a > b$ gegeben. Dann folgt:

$$\begin{array}{lrcll}
 & a & > & b & \mid \ \cdot b \qquad (*) \\
\Longrightarrow & a \cdot b & > & b^2 & \mid \ -a^2 \\
\Longrightarrow & a \cdot b - a^2 & > & b^2 - a^2 & \mid \ : (b - a) \\
\Longrightarrow & a & > & b + a & \mid \ + (*) \\
\Longrightarrow & 2a & > & 2b + a & \mid \ -a \\
\Longrightarrow & a & > & 2b & \mid
\end{array}$$

Was ist an dieser Argumentation falsch?

1.6 Nichtstandardzahlen

Wir wollen auch mit unbeschränkten (unendlich großen) und infinitesimalen (unendlich kleinen) Größen arbeiten. Dabei heißt eine Größe

ω **unbeschränkt,** wenn sie größer ist als jede positive ganze Zahl, oder wenn sie kleiner ist als jede negative ganze Zahl, d.h.

$$\begin{aligned} n < \omega &\quad \text{für jedes} \quad n \in \mathbb{N}, \text{ oder} \\ \omega < -n &\quad \text{für jedes} \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

und es heißt

ε **infinitesimal,** wenn für jede natürliche Zahl n gilt

$$-\frac{1}{n} < \varepsilon < \frac{1}{n},$$

aber $\varepsilon \neq 0$ ist.

Solche Zahlen kommen in $\mathbb{R}$ nicht vor, denn wenn man eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ zur nächsten ganzen Zahl $n := \lceil a \rceil$ aufrundet, so sieht man wegen $a \leq n$, dass a nicht unbeschränkt sein kann. Da eine infinitesimale Größe ε von Null verschieden ist, kann man ihren Kehrwert bilden. Dieser wäre dann offensichtlich unbeschränkt, liegt also nicht in $\mathbb{R}$, und damit ε auch nicht. Sie liegen aber in einer Erweiterung $\mathbb{R}^*$ von $\mathbb{R}$, also $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$, und heißen Nichtstandardzahlen.

Die Zahlen aus $\mathbb{R}^*$ verhalten sich fast hundertprozentig so, wie man es naiverweise von unbeschränkten und infinitesimalen Größen erwartet, insbesondere sind alle Rechenoperationen genauso wie in $\mathbb{R}$ möglich, und alle Rechenregeln, Definitionen etc. gelten weiter. Einige besonders angenehme Eigenschaften sind[3]:

- Jede Formel, die für beliebig große positive reelle Zahlen richtig ist, gilt auch für alle positiven unbeschränkten Größen.
- Die vorige Aussage bleibt richtig, wenn man „positiv“ durch „negativ“ ersetzt.
- Jede Formel, die für betragsmäßig beliebig kleine reelle Zahlen richtig ist, gilt auch für alle infinitesimalen Größen.

Diese Eigenschaften nennt man das Korrespondenzprinzip für Nichtstandardzahlen.

Weniger angenehme Eigenschaften sind:

- $\mathbb{R}^*$ enthält *sehr* viel mehr Zahlen als $\mathbb{R}$.
- Es gibt keine Bezeichnungsweise für Zahlen in $\mathbb{R}^*$, die sich allgemein durchgesetzt hätte.

[3]Hier muss eigentlich ganz präzise definiert werden, was genau eine Formel ist. Darauf werden wir allerdings verzichten.

Beides soll uns aber nicht stören, da wir fast nur die Existenz unbeschränkter und infinitesimaler Größen ausnutzen werden. Wir werden unbeschränkte Zahlen durch $\omega,\ \Omega,\ N,\ M\ldots$ o.ä. bezeichnen, und infinitesimale durch $\varepsilon,\ \delta\ldots$ etc.

Überraschend ist, dass es unter den Nichtstandardzahlen in $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ Zahlen mit vertrauten Eigenschaften gibt, nämlich

- ganze Zahlen ($\mathbb{N}^*$),
- gerade und ungerade ganze Zahlen,
- rationale Zahlen ($\mathbb{Q}^*$),
- beschränkte Zahlen (!)
- $\ldots$

Davon werden wir gelegentlich ein wenig Gebrauch machen.

Die beschränkten Zahlen in $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$ entstehen z.B. so: mit einer infinitesimalen Zahl δ bilde man die Summe $a := 2 + \delta$. a liegt unendlich dicht an 2, ist aber von 2 verschieden (weil $\delta \neq 0$ ist), und kann deshalb nicht in $\mathbb{R}$ liegen. Sie ist aber auch nicht unbeschränkt, denn es ist $a < 3$.

Man kann $\mathbb{R}^*$ in vier Teile zerlegen[4]: $\boxed{\text{Powerpoint } 19}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \quad & \cup \quad \{ \text{ unbeschränkte Zahlen } \} \cup \{ \text{ infinitesimale Zahlen } \} \\ & \cup \quad \{ \text{ beschränkte Zahlen } \} \end{aligned}$$

Definition 1.6.1 *Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}^*$ heißen* unendlich benachbart*, geschrieben*

$$a \simeq b,$$

wenn ihre Differenz $a - b$ infinitesimal ist.

Wichtig ist der folgende

Satz 1.6.2 *Zu jeder beschränkten Zahl $a \in \mathbb{R}^*$ gibt es eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $a \simeq b$. Die Zahl b heißt der* Standardteil *von a, geschrieben $(a)_{\text{st}}$.*

Natürlich gilt für infinitesimales ε, dass $(\varepsilon)_{\text{st}} = 0$ ist.

[4] Die Zerlegung ist nicht disjunkt: infinitesimale Zahlen sind auch beschränkt!

Standardteile passen gut zu Rechenoperationen, d.h. man kann die Bildung von Standardteilen mit Rechenoperationen vertauschen, sofern alle beteiligten Standardteile existieren:

$$\begin{aligned}(a+b)_{\mathrm{st}} &= (a)_{\mathrm{st}} + (b)_{\mathrm{st}}\\ (a\cdot b)_{\mathrm{st}} &= (a)_{\mathrm{st}} \cdot (b)_{\mathrm{st}}\\ (-a)_{\mathrm{st}} &= -(a)_{\mathrm{st}}\\ \left(\frac{1}{a}\right)_{\mathrm{st}} &= \frac{1}{(a)_{\mathrm{st}}}\end{aligned}$$

Mit Hilfe der folgenden offensichtlichen Tatsachen können viele Fragen nach der Existenz von Standardteilen leicht beantwortet werden:

> Wenn δ und ε infinitesimale, Ω und ω unbeschränkte Größen bezeichnen, und wenn $a \in \mathbb{R}$ ist, dann sind
>
> - $\delta \pm \varepsilon$, $\frac{1}{\Omega}$, $a \cdot \delta$ infinitesimal,
> - $a \pm \delta$ beschränkt,
> - $a \pm \Omega$, $\Omega \pm \delta$, $a \cdot \Omega$, $\frac{1}{\delta}$ unbeschränkt und
> - $\Omega - \omega$, $\frac{\Omega}{\omega}$, $\frac{\delta}{\varepsilon}$, $\delta \cdot \Omega$ nicht ohne Weiteres einem der Teile von $\mathbb{R}^*$ zuzuordnen.

1.6.1 Aufgaben

Aufgabe 1.23 : Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^*$ eine unbeschränkte Zahl und $\delta \in \mathbb{R}^*$ eine infinitesimale. Welche der folgenden Ausdrücke sind unbeschränkt, beschränkt, infinitesimal oder $\in \mathbb{R}$?

$$\begin{array}{llllll} a) & \frac{1}{\Omega} & b) & \frac{1}{\delta} & c) & 2+\delta \\ d) & 2-\Omega & e) & \frac{1}{\Omega}-\delta & f) & \frac{\Omega^2-4}{\Omega-2}-\Omega \end{array}$$

Aufgabe 1.24 : Seien Ω und δ wie in Aufgabe 1.23 . Welche der folgenden Zahlen haben einen Standardteil und welchen?

$$\begin{array}{llllll} a) & \frac{1}{5+\Omega} & b) & \frac{1}{5+\delta} & c) & (2+\delta)^2 \\ d) & 2-\Omega & e) & \frac{1}{\Omega}-\delta & f) & \frac{\Omega^2-4}{\Omega^2-2} \end{array}$$

Kapitel 2

Folgen und Reihen

In diesem Kapitel werden Grenzwerte von Zahlenfolgen und Reihen betrachtet.

2.1 Unendliche Folgen

Definition 2.1.1 *Wenn jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet ist, so nennt man dies eine* **unendliche Zahlenfolge** *und schreibt dafür*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

a_n *heißt das* **n-te Folgenglied** *der Folge.*

Beispiele:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,	$a_n = a$,	konstante Folge $a, a, a, a, \ldots$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,	$a_n = (-1)^n$,	alternierende Folge $1, -1, 1, -1, \ldots$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,	$a_n = a + nd$,	arithmetische Folge $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,	$a_n = a \cdot q^n$,	geometrische Folge $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,	$a_n = \frac{1}{n+1}$,	harmonische Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Man interessiert sich für das Verhalten der Folgenglieder a_n, wenn der Folgenindex n unendlich groß wird.

Definition 2.1.2 *Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt* **Häufungspunkt** *einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine unbeschränkte natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}^*$ gibt mit $(a_N)_{\mathrm{st}} = a$.*
Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** *einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für jede unbeschränkte natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}^*$*

$$(a_N)_{\mathrm{st}} = a$$

gilt. Die Folge heißt dann **konvergent** *und man schreibt:*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \textit{oder} \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keinen Grenzwert hat, so ist das Symbol* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *undefiniert und darf in Rechnungen nicht verwendet werden. Die Folge heißt dann* **divergent**.

Aus dem Korrespondenzprinzip folgt, dass man die Existenz eines Grenzwertes aus dem Verhalten der Folgenglieder a_n für unbeschränkt wachsenden Folgenindex n ablesen kann: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist gleichbedeutend damit, dass sich a_n für wachsendes n beliebig nahe an a annähert, d.h. in beliebig kleinen Umgebungen $U_\varepsilon(a),\ \varepsilon \to 0$, liegt.

Gelegentlich verwendet man noch für divergente Folgen die Schreibweisen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

in der Bedeutung: *Für jede unbeschränkte Zahl* $N \in \mathbb{N}^*$ *ist* a_N *positiv und unbeschränkt bzw. negativ und unbeschränkt.*

Beispiele:

1. Die konstante Folge $a_n := a$ hat den Grenzwert a:

$$(a_N)_{\text{st}} = (a)_{\text{st}} = a.$$

2. Die alternierende Folge $a_n := (-1)^n$ hat -1 und 1 als Häufungspunkte:

$$(a_N)_{\text{st}} = \begin{cases} (1)_{\text{st}} = 1 & \text{für } N \text{ gerade }, \\ (-1)_{\text{st}} = -1 & \text{für } N \text{ ungerade }. \end{cases}$$

3. Die arithmetische Folge ist divergent:

$$a_N := a + N \cdot d \text{ ist unbeschränkt für unbeschränktes } N.$$

4. Das Verhalten der geometrischen Folge hängt von q ab:

$$\left(aq^N\right)_{\text{st}} = \begin{cases} \text{nicht existent} & \text{für } |q| > 1, \\ (a)_{\text{st}} = a & \text{für } q = 1, \\ \left(a(-1)^N\right)_{\text{st}} = \begin{cases} a & \text{für } N \text{ gerade} \\ -a & \text{für } N \text{ ungerade} \end{cases} & \text{für } q = -1, \\ a\left(q^N\right)_{\text{st}} = a \cdot 0 = 0 & \text{für } |q| < 1. \end{cases}$$

5. Die harmonische Folge konvergiert:

$$\left(\frac{1}{N}\right)_{\mathrm{st}} = 0 \text{ (Kehrwerte unbeschränkter Zahlen sind infinitesimal!)}$$

Damit haben wir fast den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.1.3 (Grenzwerte einiger Standardfolgen)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} q^n &= \begin{cases} \textit{divergent} & \textit{für } q \leq -1 \\ 0 & \textit{für } |q| < 1 \\ 1 & \textit{für } q = 1 \\ \infty & \textit{für } q > 1 \end{cases} \\
\lim_{n\to\infty} n^a &= \begin{cases} 0 & \textit{für } a < 0 \\ 1 & \textit{für } a = 0 \\ \infty & \textit{für } a > 0 \end{cases} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} &= 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R} \\
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &=: e = 2.718\,281\,828\,459\,0\ldots
\end{aligned}$$

Die Zahl e heißt Eulersche *Konstante und ist die Basis der natürlichen Logarithmen*[1].

Wegen der Rechenregeln für Standardteile ist klar:

Satz 2.1.4 (Rechenregeln für Grenzwerte) *Wenn die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) &= c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n;
\end{aligned}$$

Wenn alle $b_n \neq 0$ sowie $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ist, so gilt außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

[1] die in 3.5.5 besprochen werden.

Beispiele:

1. Es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5n+1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}$, denn
$$\begin{aligned}\left(\frac{3N^2-5N+1}{(2N+1)^2}\right)_{\text{st}} &= \left(\frac{3N^2-5N+1}{4N^2+4N+1}\right)_{\text{st}} \\ &= \left(\frac{3-5\frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}}{4+4\frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}}\right)_{\text{st}} \\ &= \frac{3-5\left(\frac{1}{N}\right)_{\text{st}}+\left(\frac{1}{N^2}\right)_{\text{st}}}{4+4\left(\frac{1}{N}\right)_{\text{st}}+\left(\frac{1}{N^2}\right)_{\text{st}}} \\ &= \frac{3-5\cdot 0+0}{4+4\cdot 0+0} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$
für jedes $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$.

2. Es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+6^n}{5^n+6^n} = 1$, denn
$$\begin{aligned}\frac{4^N+6^N}{5^N+6^N} &= \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^N+1}{\left(\frac{5}{6}\right)^N+1} \\ &\simeq \frac{0+1}{0+1} \\ &= 1\end{aligned}$$
für jedes $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$.

In vielen Fällen reichen aber solch einfache Rechnungen nicht aus, um Grenzwerte zu bestimmen. Oft können andere Verfahren helfen, siehe z.B. die Regel von l'Hospital, Seite 78. Manchmal kann der Grenzwert nicht ohne weiteres bestimmt werden. Wenigstens seine Existenz läßt sich mit den folgenden zwei Sätzen nachweisen:

Satz 2.1.5 (Kriterium von Cauchy) *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn*
$$a_N - a_M \simeq 0 \text{ ist für beliebige } N, M \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}.$$

Satz 2.1.6 *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine* **monoton wachsende** *Folge, d.h. gilt $a_n \leq a_m$ für $n < m$, und ist sie* **beschränkt**, *d.h. $a_n < C$ mit festem $C \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Folge konvergent.*

Beweis: Aus dem Korrespondenzprinzip und $a_n < C$ folgt $a_N < C$ auch für alle unbeschränkten $N \in \mathbb{N}^*$. Damit hat die Folge zumindest Häufungspunkte. Seien

$a_1 := (a_N)_{\mathrm{st}}$ und $a_2 := (a_M)_{\mathrm{st}}$ zwei solche. Ebenfalls aus dem Korrespondenzprinzip und $a_n \leq a_m$ für $n < m$ folgt $a_N \leq a_M$ für $N < M$ auch für $N, M \in \mathbb{N}^*$. Da N unbeschränkt ist, hat man $n < N$ für $n \in \mathbb{N}$, also $a_n \leq a_N$, und weil $a_n \in \mathbb{R}$ liegt, sogar $a_n \leq a_1$. Aus dem Korrespondenzprinzip folgt nun wieder $a_M \leq a_1$ für unbeschränktes M. Sei nun $a_2 := (a_M)_{\mathrm{st}}$ ein zweiter Häufungspunkt, dann hat man

$$a_2 \leq a_1.$$

Vertauscht man in der Argumentation oben die Rollen von N und M, so erhält man auch umgekehrt

$$a_1 \leq a_2.$$

Zwei beliebige Häufungspunkte sind also gleich, d.h. die Folge konvergiert.

2.1.1 Aufgaben

Aufgabe 2.1 : Versuchen Sie, durch numerische Rechnungen festzustellen, ob und wenn ja, welchen Grenzwert die nachstehenden Folgen haben:

$$\begin{array}{llcl}
\text{a)} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, & a_n & = & \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\
\text{b)} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, & a_n & = & n\cdot\ln(1-\dfrac{1}{n}) \\
\text{c)} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, & a_1 & = & 0.07, \quad a_{n+1} = 0.07^{a_n} \\
\text{d)} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, & a_1 & = & \dfrac{1}{3}, \quad a_{n+1} = 3.3\cdot a_n(1-a_n)
\end{array}$$

Aufgabe 2.2 : Welche der folgenden Grenzwerte existieren und welchen Wert haben sie?

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(3n+\frac{4}{n}\right)}{n+\frac{1}{n}} \\
\text{b)} & \lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right) \\
\text{c)} & \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6^n+4^{n+1}}{4\cdot 2^n+3^n}-\dfrac{8^n}{2^n+4^n}\right)
\end{array}$$

Aufgabe 2.3 : Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$$

2.2 Unendliche Reihen

Definition 2.2.1 *Es sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Mit ihrer Hilfe werde eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N},n\geq k}$, die Folge der* **Partialsummen** *von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch*

$$s_n = \sum_{i=k}^{n} a_i.$$

Wenn die so definierte Folge einen Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ hat, so schreibt man

$$s = \sum_{i=k}^{\infty} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots$$

und nennt dies den Wert der **unendlichen Reihe** *$\sum_{i=k}^{\infty} a_i$. Die Reihe heißt dann* **konvergent**. *Existiert der Grenzwert nicht, so heißt die Reihe* **divergent**. *Der Wert einer konvergenten unendlichen Reihe läßt sich auffassen als die Summe aller unendlich vielen Summanden der Reihe.*

Beispiel: Es ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1,$$

denn aus Formel 1.7, Seite 11, folgt $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, und offenbar ist $\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)_{\mathrm{st}} = 1$ für $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$.

Satz 2.2.2 *Es seien $\sum_{i=k}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=k}^{\infty} b_i$ konvergent. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{\infty} c \cdot a_i &= c \cdot \sum_{i=k}^{\infty} a_i \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \\ \sum_{i=k}^{\infty} (a_i + b_i) &= \sum_{i=k}^{\infty} a_i + \sum_{i=k}^{\infty} b_i. \end{aligned}$$

Satz 2.2.3 *Werte einiger spezieller Reihen:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ \text{divergent} & \text{für } |q| \geq 1 \end{cases}, \quad \text{geometrische Reihe,} \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \pm \cdots = \ln 2, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{2i-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \pm \cdots = \frac{\pi}{4}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots = e. \tag{2.5}$$

Bemerkung: Die Reihe 2.1 hat viele Anwendungen, die Reihen 2.2 bis 2.5 sind hier eher als Kuriositäten zu werten.

Eine Reihe kann nur dann konvergieren, wenn die Summanden gegen Null konvergieren. Sei nämlich $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (s_N)_{\text{st}} - (s_{N-1})_{\text{st}} \\ &= (s_N - s_{N-1})_{\text{st}} \\ &= (a_N)_{\text{st}} . \end{aligned}$$

Die Umkehrung gilt aber nicht, denn die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \to \infty \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2.1 Aufgaben

Aufgabe 2.4 : Überzeugen Sie sich durch einige Beispiele davon, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+3)(2i+5)} = \frac{1}{10} - \frac{1}{4n+10}$$

und berechnen Sie dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+3)(2i+5)}.$$

Aufgabe 2.5 : Berechnen Sie

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i .$$

Aufgabe 2.6 : Berechnen Sie die folgende unendliche Reihe:

$$\sum_{i=-1}^{\infty} \frac{2 + 3 \cdot 4^i}{5^i}$$

Aufgabe 2.7 : Wandeln Sie die folgenden periodischen Dezimalbrüche in echte Brüche um:

$$\text{a)} \quad 0{,}0\overline{29}\ldots, \qquad \text{b)} \quad 0{,}\overline{02}\ldots, \qquad \text{c)} \quad 0{,}24\overline{25}\ldots, \qquad \text{d)} \quad 0{,}\overline{123}\ldots.$$

Aufgabe 2.8 : Berechnen Sie die Zahl $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ mit Hilfe der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

bis auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

(Anleitung: Verwenden Sie die Abschätzung

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^n},$$

um herauszufinden, wieweit Sie höchstens noch vom Summenwert e entfernt sein können, wenn Sie nach m Summanden aufhören, zu summieren.)

Kapitel 3

Funktionen

Funktionen sind die zentralen Gegenstände der Analysis. In diesem Kapitel werden sie definiert und besondere Klassen von Funktionen vorgestellt.

3.1 Allgemeines

Definition 3.1.1 *Eine* Funktion f *ist eine* Abbildung *zwischen zwei Mengen* A *und* B*, die jedem* $a \in A$ *genau ein* $b = f(a) \in B$ *zuordnet. Geschrieben:* $f : A \to B,\ a \mapsto b$*.* B *heißt* Bildbereich *von* f*.* A *heißt* Definitionsbereich *von* f*, geschrieben* $A = D(f)$*. Die Menge*

$$W(f) := \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$$

heißt Wertebereich *von* f*. Es ist stets* $W(f) \subseteq B$*, aber i.a.* $W(f) \neq B$*.*

Grundsätzlich sind für A und B beliebige Mengen erlaubt, wir werden aber ausschließlich Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder in einem späteren Abschnitt von $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ betrachten.

Wenn gelegentlich auf die Angabe von $D(f)$ verzichtet wird, ist für $D(f)$ immer die größte Menge zu nehmen, auf der der analytische Ausdruck für f definiert ist.

Beispiele:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := {}^1\!/x;\ D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ W(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \sqrt{x};\ D(f) = \mathbb{R}^+ := [0, \infty),\ W(f) = \mathbb{R}^+.$$ [1]

[1] Man beachte, dass der Wert der Wurzelfunktion stets ≥ 0 ist!

Definition 3.1.2 *Sei $f : A \to B$ eine Funktion, $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der* Graph $\mathrm{G}(f)$ *von f gegeben durch*

$$\mathrm{G}(f) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in A,\ y \in B,\ y = f(x)\Big\}.$$

Der Graph der Funktion $f(x) = {}^1/_x$ ist in Abb. 3.1 dargestellt.

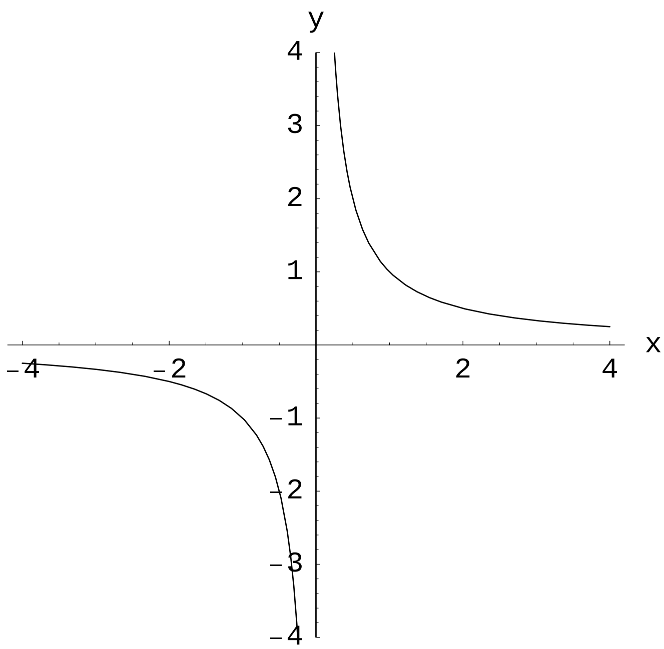


Abbildung 3.1: *Graph von* $y = \frac{1}{x}$

Satz 3.1.3 *Es seien zwei Funktionen gegeben, $f : A \to B,\ g : B' \to C$. Dann gibt es eine Funktion $h : A' \to C$, die* Komposition *von f und g, mit der Eigenschaft*

$$h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A'.$$

Man schreibt $h = g \circ f$.
Dabei ist $A' \subseteq A$ eine Teilmenge von A, die nur dann $\neq \emptyset$ ist, wenn $W(f) \cap B' \neq \emptyset$ ist.

<u>Beispiel:</u>

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2 - \sqrt{x}, \quad W(f) = (-\infty, 2]$$
$$g : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x-1}, \quad W(g) = \mathbb{R}^+$$

Man erhält

$$h = g \circ f : x \mapsto g(f(x)) = g(2 - \sqrt{x}) = \sqrt{(2 - \sqrt{x}) - 1} = \sqrt{1 - \sqrt{x}},$$

mit $A' = D(h) = [0,1] \subset D(f)$ und $W(h) = [0,1] \subset W(g)$.

Im Allgemeinen ist $g \circ f \neq f \circ g$:

$$\tilde{h} = f \circ g : x \mapsto f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = 2 - \sqrt{\sqrt{x-1}} = 2 - \sqrt[4]{x-1},$$

mit $\tilde{A}' = D(\tilde{h}) = [1, \infty) = D(g)$ und $W(\tilde{h}) = W(f)$.

Definition 3.1.4 *Eine Funktion $f : A \to B$ heißt* injektiv, *wenn gilt:*

$$x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y),$$

d.h. eine Funktion ist injektiv, wenn jeder Wert aus B höchstens einmal *als Funktionswert angenommen wird.*

f heißt surjektiv, *wenn gilt:*

$$W(f) = B,$$

d.h. eine Funktion ist surjektiv, wenn jeder Wert aus B mindestens einmal *als Funktionswert angenommen wird.*

f heißt bijektiv, *wenn f injektiv* und *surjektiv ist, d.h. eine Funktion ist bijektiv, wenn jeder Wert aus B* genau einmal *als Funktionswert angenommen wird.*

Beispiel: Betrachte die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f_1(x) &= x^2. \\ f_2 &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, & f_2(x) &= x^2 \\ f_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, & f_3(x) &= x^2 \\ f_4 &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, & f_4(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Alle Funktionen sind durch denselben analytischen Ausdruck gegeben und unterscheiden sich nur durch den Definitionsbereich oder den Bildbereich.

f_1 ist weder injektiv noch surjektiv, denn $f_1(-2) = f_1(2) = 4$, und $-1 \notin W(f_1)$;
f_2 ist injektiv (z.B. $-2 \notin D(f_2)$), aber nicht surjektiv;
f_3 ist surjektiv (z.B. $-1 \notin \mathbb{R}^+$), aber nicht injektiv;
f_4 schließlich ist surjektiv und injektiv, also bijektiv.

Merke: Es hängt wesentlich vom Definitions- und Bildbereich ab, ob eine Funktion injektiv oder surjektiv ist.

Satz 3.1.5 *Sei $f : A \to B$ eine bijektive Funktion. Dann gibt es genau eine* Umkehrfunktion *$f^{-1} : B \to A$ mit der Eigenschaft*

Powerpoint 23

$$f^{-1} \circ f(x) = x \text{ für } x \in A \text{ und } f \circ f^{-1}(x) = x \text{ für } x \in B.$$

Bemerkung: Da sich durch Verkleinern des Bildbereiches immer erzwingen läßt, dass eine Funktion surjektiv wird, spricht man auch von der Umkehrfunktion einer nur injektiven Funktion. Dabei verzichtet man dann oft auf die Angabe des genauen Definitionsbereiches der Umkehrfunktion.

Beispiel: $f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}^+, \ x \mapsto (x-2)^2$ ist bijektiv.
f^{-1} wird bestimmt, indem die Gleichung $f(x) = y$ nach x aufgelöst wird:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= y & &\mid \sqrt{\ } \\ \pm(x-2) &= \sqrt{y} & &\mid \cdot(\pm 1) \\ (x-2) &= \pm\sqrt{y} & &\mid +2 \\ x &= \pm\sqrt{y} + 2 & & \end{aligned}$$

Hier hat man zwei Möglichkeiten für x erhalten. Die Entscheidung darüber, welches die richtige ist, wird anhand des Definitionsbereiches $D(f)$ getroffen. Es muss ja gelten:

$$x = f^{-1}(y) \in W(f^{-1}) = D(f) = (-\infty, 2].$$

Damit kommt nur das negative Vorzeichen in Frage, und die Umkehrfunktion ergibt sich zu

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to (-\infty, 2], \ x \mapsto -\sqrt{y} + 2$$

Wäre $D(f) = \mathbb{R}$ gewesen, hätte sich keine der beiden Möglichkeiten für x ausschließen lassen, die Funktion wäre nicht injektiv und hätte auch keine Umkehrfunktion.

Die Injektivität einer Funktion kann an ihrem Graphen abgelesen werden: wenn jede Parallele zur x-Achse den Graphen in höchstens einem Punkt trifft, dann ist die Funktion injektiv.

3.1.1 Aufgaben

Aufgabe 3.1 : Geben Sie für die folgenden Funktionen die maximalen Definitionsbereiche an:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & f(x) = \sqrt{9 - x^2} & \text{b)} & f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \\ \text{c)} & f(x) = \ln\left(\sqrt{x} - 1\right) & \text{d)} & f(x) = \dfrac{\ln(4-x)}{\sqrt{x-1}} \\ \text{e)} & f(x) = \sqrt{|x| - x} & \text{f)} & f(x) = \sqrt{x - |x|} \end{array}$$

Aufgabe 3.2 : Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen injektiv sind und geben Sie für die injektiven Funktionen die Umkehrfunktion an:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, & f(x)=x^2-2x \\
\text{b)} & f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & f(x)=x^3+4 \\
\text{c)} & f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}, & f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1} \\
\text{d)} & f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}, & f(x)=1+\sqrt{4+x^2} \\
\text{e)} & f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, & f(x)=1+\sqrt{4+x^2} \\
\text{f)} & f:[0,\frac{1}{12})\to\mathbb{R}, & f(x)=\ln(6x^2-x+\frac{1}{12})
\end{array}$$

Aufgabe 3.3 : Bestimmen Sie zwei Zahlen a und b so, dass

$$f:[a,\infty)\to[b,\infty),\quad x\mapsto f(x)=x^2-2x+2$$

injektiv ist.

3.2 Stetigkeit

Definition 3.2.1 *Eine Funktion $f : A \to B$ heißt* stetig in einem Punkt $a \in A$, *wenn*

$$f(a+\delta)\simeq f(a)$$

gilt für jedes infinitesimale δ. Äquivalent dazu ist die Forderung

$$(a^*)_{\mathrm{st}}=a \Longrightarrow (f(a^*))_{\mathrm{st}}=f(a).$$

f heißt stetig, *wenn f in ganz A stetig ist.*

Anschaulich gesagt sollen infinitesimale Änderungen des Argumentes auch nur infinitesimale Änderungen des Funktionswertes bewirken. Meistens kann die Stetigkeit einer Funktion an deren Graph abgelesen werden: Graphen stetiger Funktionen lassen sich in einem Zuge zeichnen, ohne den Stift absetzen zu müssen. Powerpoint 24

Die meisten Funktionen sind stetig wegen

Satz 3.2.2

1. *Konstante Funktionen $x \mapsto f(x) = a$, mit $a \in \mathbb{R}$ fest, sind stetig.*

2. *Die Identität $x \mapsto f(x) = x$ ist stetig.*

3. *Die Funktionen $\mathbf{1} : x \mapsto 1$ und $\mathbf{id} : x \mapsto x$ sind stetig.*

4. *Summe, Differenz, Produkt und Komposition stetiger Funktionen sind stetig.*
5. *Quotienten stetiger Funktionen sind überall dort stetig, wo der Nenner nicht Null ist.*
6. *Potenzen und Logarithmen sind stetige Funktionen.*

Definition 3.2.3 *Für eine Funktion $f : A \to B$ schreibt man*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

wenn

$$f(x_0 + \delta) \simeq a$$

ist für jedes infinitesimale δ. Man nennt a den Grenzwert *von f für $x \to x_0$. x_0 muss nicht notwendig in $D(f)$ liegen!*

Stetige Funktionen verhalten sich angenehm bezüglich Bildung von Grenzwerten:

Satz 3.2.4 *$f : A \to B$ ist in $a \in A$ stetig $\Longleftrightarrow$*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Die beiden vorigen Sätze folgen (fast)[2] unmittelbar aus den Eigenschaften des Standardteils.

Beispiele:

$$f_1(x) := \begin{cases} (x-1)^3 & \text{für } x \geq 1 \\ x & \text{für } x < 1 \end{cases} \qquad \text{ist in } x = 1 \text{ unstetig (Lücke),}$$

$$f_2(x) := \begin{cases} x \text{ für } x > 1 \\ 2 \text{ für } x = 1 \\ x \text{ für } x < 1 \end{cases} \qquad \text{ist in } x = 1 \text{ unstetig (Loch),}$$

$$f_3(x) := \begin{cases} {}^1\!/x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{ist in } x = 0 \text{ unstetig (Polstelle).}$$

Begründung:

$$\begin{aligned} f_1(1+\delta) &= 1 + \delta \simeq 1 \neq f_1(1) = 0 \text{ für infinitesimales } \delta < 0, \\ f_2(1+\delta) &= 1 + \delta \simeq 1 \neq f_2(1) = 2 \text{ für infinitesimales } \delta, \\ f_3(\delta) &= \frac{1}{\delta} \text{ ist unbeschränkt für infinitesimales } \delta. \end{aligned}$$

[2] das „fast" bezieht sich nur auf Teil 6 von Satz 3.2.2.

Definition 3.2.5

1. *Ein* $a \in \mathbb{R}$ *heißt* Polstelle *einer Funktion* f*, wenn für* $a^* \neq a$ *gilt*
$$a^* \simeq a \Longrightarrow f(a^*) \text{ ist unbeschränkt } .$$
2. $a \in \mathbb{R}$ *heißt* hebbare Unstetigkeitsstelle *von* f*, wenn*
$$\lim_{x \to a} f(x) = y \text{ existiert, aber } a \notin D(f) \text{ oder } y \neq f(a)$$
ist.
3. $a \in D(f)$ *heißt* Nullstelle *von* f*, wenn* $f(a) = 0$ *ist.*

f_2 hat eine hebbare Unstetigkeitstelle in $x = 1$, f_3 hat eine Polstelle in $x = 0$.

3.2.1 Aufgaben

Aufgabe 3.4 : Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f(x) = |x|$$
auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 3.5 : Was ist mit der Funktion
$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2}$$
an der Stelle $x = 0$ los?

Aufgabe 3.6 : Berechnen Sie

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x}{1 - x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\sqrt{2 - x}}{x^2 - 1}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3.7 : Betrachten Sie die folgende Funktion, in deren Definition eine noch nicht bestimmte Konstante $a \in \mathbb{R}$ vorkommt:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -x^2 - x - 3 & für \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \\ -\frac{11}{4} & für \quad x \in (-\frac{1}{2}, 1] \\ x^2 - 2x + a & für \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$$
Prüfen Sie, ob die Funktion an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ stetig ist. Welchen Wert muss man für a einsetzen, damit die Funktion an der Stelle $x = 1$ stetig wird?

3.3 Polynome

Definition 3.3.1 Polynome *sind Funktionen, die nur mit den Rechenoperationen Addition, Subtraktion und Multiplikation gebildet sind. Sie lassen sich immer auf die folgende Gestalt bringen:*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_n \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Die a_i *heißen die* Koeffizienten *des Polynoms* f, a_0 *ist das* absolute Glied, n *heißt der* Grad *des Polynoms, geschrieben* $\deg(f)$.

Alle Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig[3].

Funktionswerte von Polynomen lassen sich leicht mit dem Hornerschema berechnen:

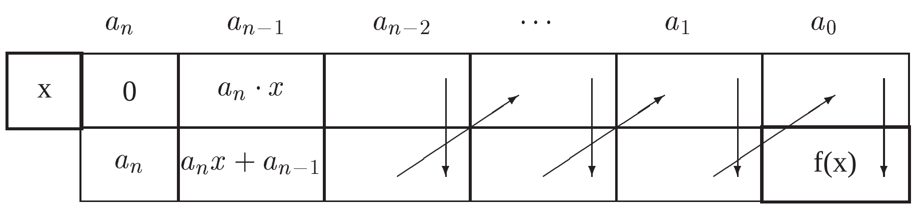


Abbildung 3.2: *Hornerschema*

Oberhalb des obigen Schemas werden die Koeffizienten a_n bis a_0 des Polynoms aufgeschrieben. Die beiden Zellen links oben werden mit dem Argument x und 0 gefüllt. Die weiteren Zellen des Schemas werden ausgefüllt, indem man abwechselnd den senkrechten und den nach rechts oben weisenden Pfeilen folgt, beginnend mit dem senkrechten Pfeil, ausgehend von der Zelle mit der 0.

- dem *senkrechten* Pfeil folgend ergibt sich der Zelleninhalt der unteren Zeile als Summe aus dem Koeffizienten a_i und dem Inhalt der Zelle in der oberen Zeile.
- dem *schrägen* Pfeil folgend ergibt sich der Zelleninhalt der oberen Zeile als Produkt aus dem Argument x und dem Zelleninhalt in der unteren Zeile, von der der Pfeil ausgeht.

[3] wegen Satz 3.2.2

Beispiel: Gegeben sei das Polynom $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8$, d.h. $a_3 = 2, a_2 = -6, a_1 = 0, a_0 = 8$.

	2	-6	0	8
2	0	2·2=4	2·(-2)= -4	2·(-4)= -8
	2+0=2	-6+4= -2	0+(-4)= -4	8+(-8)= 0

Abbildung 3.3: *Hornerschema für* $2x^3 - 6x^2 + 8$

Aus Abb. 3.3 liest man ab: $f(2) = 0$.[4]

Das Hornerschema liefert eine zweite Standardgestalt von Polynomen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (((\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})\ldots)x + a_1)x + a_0)$$

3.3.1 Nullstellenbestimmung von Polynomen

Zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms bedient man sich gemeinhin einer elektronischen Rechenhilfe, etwa in Form eines Computeralgebraprogrammes. Die folgenden Hinweise sind nützlich, wenn Nullstellen einmal von Hand bestimmt werden müssen.

1. Allgemein gilt zunächst der

   Satz 3.3.2 (Linearfaktorzerlegung) *Seien alle reellen Nullstellen von* $f(x)$ *gegeben durch* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *mit* $0 \leq k \leq n$*, dann läßt sich* f *als Produkt schreiben*

   $$f(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdot (x - x_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{m_k} \cdot p(x),$$

   wobei $p(x)$ *ein Polynom ohne reelle Nullstellen ist. Der Exponent* m_i *heißt die* Vielfachheit *der Nullstelle* x_i.

[4] Wenn sich als Funktionswert 0 ergibt, dann haben die Zahlen in den Zellen der unteren Zeile noch eine besondere Bedeutung, siehe Seite 46.

Beispiele:

$$x^8 + 2x^7 - 3x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x = (x-0)(x-1)^2(x+1)^3(x^2+x+1)$$

hat bei $x = 0$ eine Nullstelle der Vielfachheit 1, bei $x = 1$ eine der Vielfachheit 2, und bei $x = -1$ eine der Vielfachheit 3. $p(x) = x^2 + x + 1$ hat keine reelle Nullstelle.

$$2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = (x-1)(x+2)(x-3) \cdot 2$$

hat bei 1, –2 und 3 je eine einfache Nullstelle, $p(x) \equiv 2$.[5]

Hat man eine Nullstelle x_1 eines Polynoms f gefunden, so gibt es ein Polynom f_1 mit

$$f(x) = (x - x_1)f_1(x),\ \deg(f_1) = \deg(f) - 1,$$

woraufhin für die Suche nach den übrigen Nullstellen nur noch ein Polynom mit um 1 kleinerem Grad zu betrachten ist.

Die Koeffizienten des Polynoms f_1 finden sich in der untersten Zeile des Hornerschemas zur Berechnung von $f(x_1)$.

Beispiel: Aus dem Hornerschema Abb. 3.3, Seite 45, erhält man

$$2x^3 - 6x^2 + 8 = (x-2)(2x^2 - 2x - 4).$$

2. **quadratische Polynome:** $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ führt auf die Nullstellengleichung
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$
Setzt man $p = {}^b/_a$ und $q = {}^c/_a$, dann sind die Nullstellen gegeben durch
$$x_{1,2} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{für } p^2 - 4q > 0 \\ -\frac{p}{2} & \text{für } p^2 - 4q = 0 \end{cases}$$
Im Falle $p^2 - 4q < 0$ gibt es keine reellen Lösungen.

3. **Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten:** Sei
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ mit } a_i \in \mathbb{Z} \text{ für } 0 \leq i < n,$$
so ist jede *ganzzahlige* Nullstelle von $f(x)$ ein Teiler von a_0.

[5] gelesen: $p(x)$ ist *„identisch gleich“* 2. Damit wird eine *konstante* Funktion bezeichnet.

4. Jedes Polynom mit ungeradem Grad n hat mindestens eine reelle Nullstelle. Diese Nullstelle liegt mit Sicherheit im Intervall $[-A, A]$ mit

$$A = \max\left(\frac{1}{|a_n|}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|, 1\right)$$

Sie kann z.B. mit dem Newtonverfahren[6] sehr effektiv gefunden werden.

3.3.2 Aufgaben

Aufgabe 3.8 : Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren:

a) $f(x) = x^2 + 4x - 5$

b) $f(x) = 3x^3 - 24x^2 + 45x$

c) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 14x^2 + 24x$

d) $f(x) = 3x^4 - 11x^2 - 4$

e) $f(x) = x^8 - 1$

Aufgabe 3.9 : In welchem Intervall liegt eine Nullstelle von

$$f(x) = 12x^3 + 19x^2 - 4x + 12\ ?$$

Ist sie ganzzahlig?

3.4 Rationale Funktionen

Rationale Funktionen sind von der Form

$$f : D(f) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$$

mit zwei Polynomen $p(x)$ und $q(x)$.

Beispiel: Die Funktion $\mathbf{1} : x \mapsto 1$ ist eine rationale Funktion:

$$\mathbf{1}(x) = \frac{1}{1}, \quad p = q = \mathbf{1}, \quad D(\mathbf{1}) = \mathbb{R}.$$

Ebenso ist $f(x) = {}^{x}/_{x}$ eine rationale Funktion:

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{x}{x}, \quad p = q = \mathbf{id}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

[6] siehe Abschnitt 4.4.

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stimmen beide Funktionen offensichtlich überein, in $x = 0$ aber ist f undefiniert!

Jede rationale f Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte x_i definiert. Für das Verhalten bei Annäherung an diese Ausnahmepunkte, also die Nullstellen des Nenners q, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. $\lim\limits_{x \to x_i} f(x) = y_i$ existiert. Dann läßt sich f in x_i stetig ergänzen, indem man definiert: $f(x_i) := y_i$. x_i ist dann eine hebbare Unstetigkeitsstelle.

2. $\lim\limits_{x \to x_i} f(x)$ existiert nicht. Dann liegt in x_i eine Polstelle vor.
   Es gilt dann $\lim\limits_{x \to x_i} |f(x)| = \infty$.

Sei $q(x_0) = 0$. Für jedes infinitesimale δ ist dann $q(x_0 + \delta) \simeq 0$, also selbst infinitesimal. Ist $p(x_0) \neq 0$, dann ist $p(x_0 + \delta) \simeq p(x_0) \not\simeq 0$, also ist $f(x_0 + \delta)$ unbeschränkt und x_0 eine Polstelle. Ist x_0 eine hebbare Unstetigkeitsstelle, so muss also stets $p(x_0) = q(x_0) = 0$ sein. Man kann dann den gemeinsamen Linearfaktor $x - x_0$ in $f(x)$ herauskürzen. Führt man dieses Kürzen so lange durch, bis Zähler und Nenner von f keine gemeinsame Nullstelle mehr haben, so hat man eine rationale Funktion f_1 erhalten, die

1. auf $D(f)$ mit f übereinstimmt,

2. nur noch Polstellen hat, und

3. außerhalb der Polstellen definiert und stetig ist.

> Bemerkung: um f_1 zu finden, ist es nicht nötig, die Nullstellen von p und q explizit zu berechnen. Man kann f_1 stattdessen durch mehrfache Polynomdivisionen mit Rest bestimmen (Euklidischer Algorithmus für Polynome). Dies überläßt man sinnvollerweise aber einem Computeralgebrasystem.

Im folgenden werden wir deshalb nur noch rationale Funktionen *ohne* hebbare Unstetigkeitsstellen betrachten.

Definition 3.4.1 (Asymptote) *Für jede rationale Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$ gibt es genau ein Polynom $r(x)$ mit der Eigenschaft*

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - r(x)) = 0.$$

$r(x)$ *heißt die* Asymptote *zu* $f(x)$.

Die Berechnung der Asymptote erfolgt durch eine Polynomdivision von p und q. Für

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 2}$$

sieht das wie folgt aus:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - x^2 + x - 1) : (x-2) = x^2 + x + 3 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\qquad\quad x^2 + x \\
\qquad \underline{-(x^2 - 2x)} \\
\qquad\qquad\quad 3x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{-(3x - 6)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 5
\end{array}
$$

Hier wird die Division abgebrochen, da im nächsten Schritt negative Potenzen von x auftreten würden. Die Asymptote ist damit $r(x) = x^2 + x + 3$. Es ist nämlich nun

$$f(x) - r(x) = \frac{5}{x^2 + x + 3},$$

und $\dfrac{5}{\Omega^2 + \Omega + 3}$ ist infinitesimal für unbeschränktes Ω.

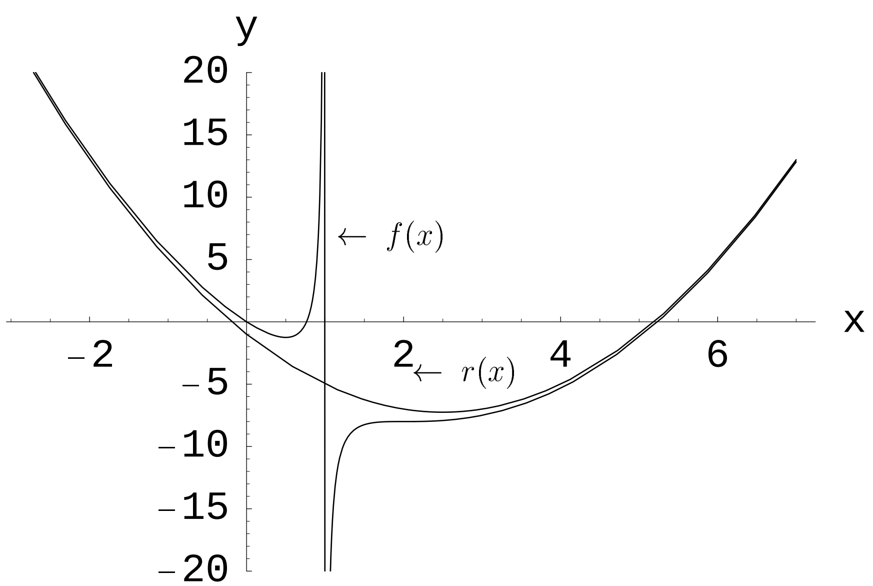


Abbildung 3.4: *Asymptote zu* $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-2}$

Es gilt

Satz 3.4.2 *Sei $f(x) = {}^{p(x)}/_{q(x)}$ eine rationale Funktion.*

1. $\deg(p) < \deg(q) \Longrightarrow r : x \mapsto 0.$
2. $\deg(p) = \deg(q) \Longrightarrow r : x \mapsto c,$
   wobei c der Quotient der höchsten Koeffizienten von p und q ist.

3.4.1 Aufgaben

Aufgabe 3.10 : Bestimmen Sie zu den folgenden rationalen Funktionen den Definitionsbereich, Polstellen, Nullstellen, sowie die hebbaren Unstetigkeitsstellen zusammen mit dem Funktionswert, den man dort ergänzen kann.
Berechnen Sie weiterhin die Asymptoten.

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad y = f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{5x^2 - 11x + 2}\\
&\text{b)}\quad y = f(x) = \frac{3x^5 - 11x^3 - 4x}{2x^2 + 3x - 2}\\
&\text{c)}\quad y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^4 - 3x^2 - 4}
\end{aligned}$$

3.5 Algebraische und transzendente Funktionen

Funktionen, die keine rationalen oder *ganzrationalen* Funktionen (d.h. Polynome) sind, lassen sich unterteilen in

- algebraische Funktionen,
  z.B. $\sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{x^2 + 1}}, \quad \ldots$
- transzendente Funktionen,
  hiervon sind für uns nur interessant die
  - Exponentialfunktion:
    $$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}\,, \quad x \mapsto e^x,$$
    und ihre Umkehrfunktion, der
  - natürliche Logarithmus:
    $$\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x$$

  ($\mathbb{R}_{>0}$ steht für $(0, \infty)$), sowie Kompositionen von diesen mit anderen Funktionen.

Dabei ist
$$e^x := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$
Alle Potenz- und Logarithmusfunktionen müssen zur analytischen Behandlung (siehe Kapitel 4) auf die Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus zurückgeführt werden:

- Für $a > 0$ heißt

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}\,, \quad x \mapsto a^x := \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$$

die Exponentialfunktion zur Basis a,

- für $a > 0,\ a \neq 1$ heißt

$$\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$

die Logarithmusfunktion zur Basis a.

$\exp_a$ ist die Verallgemeinerung der Potenzen n^m für $n, m \in \mathbb{N}$ auf reelle Werte von Basis und Exponent, sie ist für $a \neq 1$ bijektiv und hat $\log_a$ als Umkehrfunktion.

3.5.1 Grenzverhalten

1.

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty \text{ für } a > 1 \\ 1 \quad \text{für } a = 1 \\ 0 \quad \text{für } a < 1 \end{cases}$$

2.

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 \quad \text{für } a > 1 \\ 1 \quad \text{für } a = 1 \\ \infty \text{ für } a < 1 \end{cases}$$

wegen Satz 2.1.3 und (3.4) weiter unten,

3.

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} \infty \quad\ \text{für } a > 1 \\ -\infty \text{ für } a < 1 \end{cases}$$

4.

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty \text{ für } a > 1 \\ \infty \quad\ \text{für } a < 1 \end{cases}$$

wegen[7] $\log_{1/a} x = -\log_a x$, was sich aus (3.12) mit $b = {}^1\!/a$ und (3.9) weiter unten ergibt.

[7] bei $\log_a$ und $\exp_a$ werden die Klammern um das Argument gerne weggelassen

3.5.2 Spezielle Werte, Formelsammlung

In den folgenden Formeln sind alle Variablen so zu wählen, dass die Ausdrücke jeweils definiert sind.

1. Eigenschaften der Exponentialfunktionen:

$$a^0 = 1 \tag{3.1}$$
$$a^1 = a \tag{3.2}$$
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \tag{3.3}$$
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \tag{3.4}$$
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \tag{3.5}$$

2. Eigenschaften der Logarithmusfunktionen:

$$\log_a 1 = 0 \tag{3.6}$$
$$\log_a a = 1 \tag{3.7}$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \tag{3.8}$$
$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \tag{3.9}$$
$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x \tag{3.10}$$

3. Umrechnungen von einer Basis in eine andere:

$$a^x = b^{x \cdot \log_b a} \tag{3.11}$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{3.12}$$

4. Wachstumsverhalten:

Powerpoint $25{,}26$

Hier sei $a > 1$, $1 < n \in \mathbb{N}$ und p ein beliebiges Polynom.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{a^x} = 0 \tag{3.13}$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x \cdot p(x) = 0 \tag{3.14}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0 \tag{3.15}$$
$$\lim_{x\to 0} x \cdot \log_a x = 0 \tag{3.16}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{\sqrt[n]{x}} = 0 \tag{3.17}$$
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} \cdot \log_a x = 0 \tag{3.18}$$

Exponentialfunktionen wachsen also sehr stark an für $x \to \infty$ und fallen sehr rasch gegen Null für $x \to -\infty$, Logarithmusfunktionen hingegen wachsen nur sehr langsam an bzw. haben eine nur schwache Polstelle bei $x = 0$.

Zum Abschluss noch einige der erwähnten Funktionen in graphischer Darstellung (Abb. 3.5).

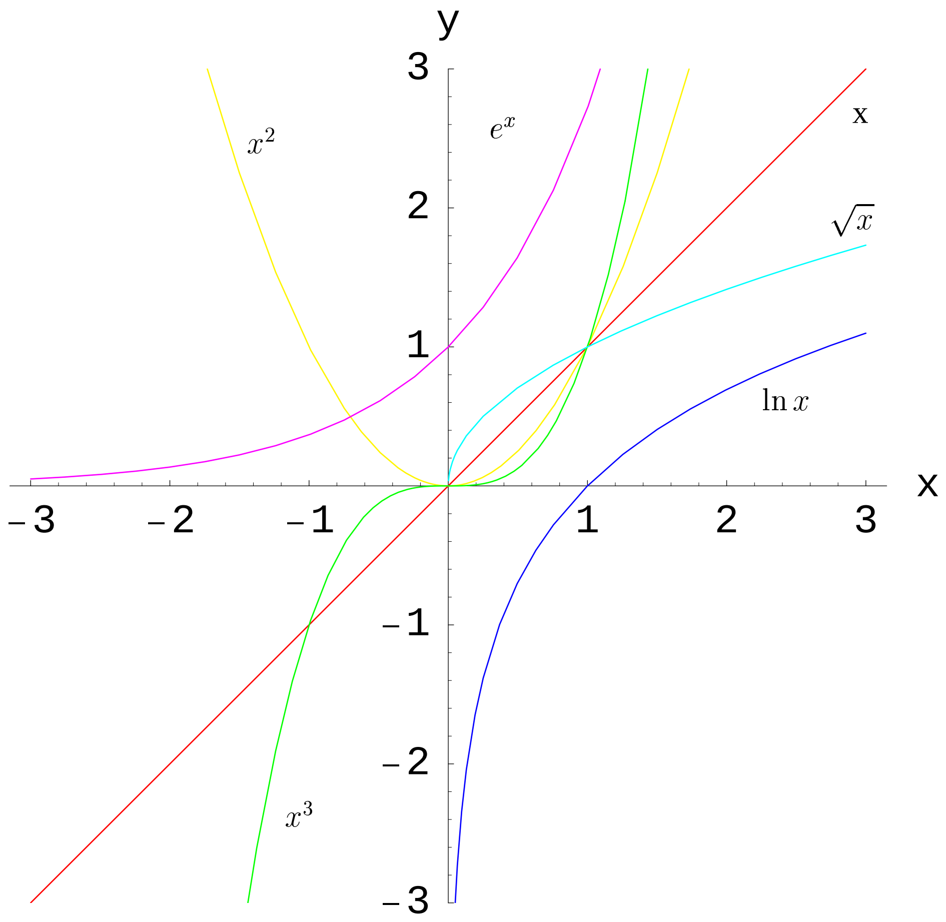


Abbildung 3.5: *Graphen einiger wichtiger Funktionen*

3.5.3 Aufgaben

Aufgabe 3.11 : Wie berechnet man $\log_2 x$, wenn man $\ln x$ kennt? Wie, wenn man $\lg x$ kennt?[8]

Aufgabe 3.12 : Berechnen Sie $\frac{\log_a x}{\log_{a^2} x}$.

Aufgabe 3.13 : Berechnen Sie $\frac{\exp_{a^2} x}{\exp_a 2x}$.

Aufgabe 3.14 : Für wieviele Jahre muss man ein Kapital bei einem Zinssatz von p% anlegen, damit es sich verdoppelt?

Aufgabe 3.15 : Was ist an folgender Argumentation falsch?

$$\begin{aligned}
\ln\frac{1}{2} &= \ln\frac{1}{2} \\
3 &> 2 \\
3\ln\frac{1}{2} &> 2\ln\frac{1}{2} \\
\ln\left(\frac{1}{2}\right)^3 &> \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^3 &> \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
\frac{1}{8} &> \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

3.5.4 Anwendungen

Es sollen drei Anwendungen transzendenter Funktionen vorgestellt werden.

Binärbäume

Binärbäume sind spezielle gerichtetete Graphen.

Definition 3.5.1 *Ein* gerichteter Graph $G(E, V)$ *besteht aus je einer endlichen Menge* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *von* Knoten[9] *und* $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subseteq V \times V$ *von*

[8] lg steht für den Logarithmus zur Basis 10.
[9] engl. = *vertex*, pl. = *vertices*

Kanten[10]. *Eine Kante* $e = (v_1, v_2)$ *verläuft vom* Anfangsknoten v_1 *zum* Endknoten v_2.

Man bezeichnet mit[11]

$$d^+(v) := \#\{e \in E \mid e = (v, v')\}$$

den Ausgangsgrad *des Knotens* $v \in V$*, und mit*

$$d^-(v) := \#\{e \in E \mid e = (v', v)\}$$

seinen Eingangsgrad.

Powerpoint 27,28

Ein Binärbaum *ist ein gerichteter Graph mit einem herausgehobenen Knoten* $v_0 \in V$*, der* Wurzel*, und den Eigenschaften*

$$\begin{aligned} \#V &=: n \geq 1 \text{ und} \\ \#E &= n - 1 \\ d^-(v_0) &= 0, \\ d^-(v) &= 1 \text{ sonst}, \\ d^+(v) &\in \{0, 1, 2\} \text{ für alle Knoten}. \end{aligned}$$

Knoten mit $d^+(v) = 0$ *heißen* Blätter.

In einem Binärbaum B gibt es genau einen Weg entlang der gerichteten Kanten, der von der Wurzel zu einem bestimmten Knoten v führt. Die Länge dieses Weges, gezählt durch die Anzahl der *Knoten* darin - nicht der Kanten - heißt der Rang $r(v)$ des Knotens. Die Höhe $h(B)$ eines Binärbaumes ist der maximale Rang eines Knotens im Baum.

Satz 3.5.2 *Sei* h *die Höhe eines Binärbaumes. Wenn die Anzahl Knoten vom Rang* j *mit* a_j *bezeichnet wird, dann ist mit* $n = \#V$

$$\begin{aligned} 1 \leq & \quad a_j && \leq 2^{j-1}, \\ j \leq & \sum_{k=1}^{j} a_k && \leq 2^j - 1, \\ h \leq & \quad n && \leq 2^h - 1 \end{aligned}$$

Damit läßt sich die Höhe abschätzen durch

$$h \geq \log_2(n + 1).$$

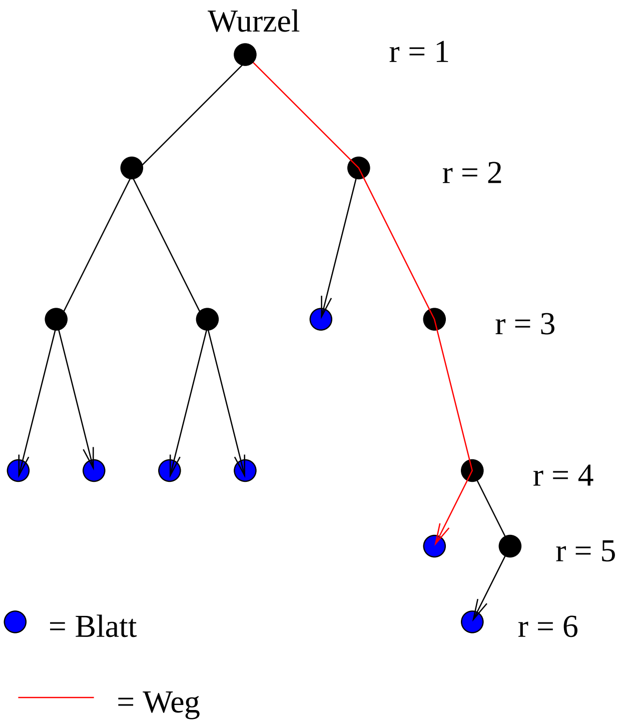


Abbildung 3.6: *Binärbaum der Höhe 6*

Binärsuche

Gegeben sei eine endliche Liste von Zahlen $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, die der Größe nach sortiert sind, d.h. $a_i \leq a_j$ für $i < j$. Um festzustellen, ob eine vorgegebene Zahl a in dieser Liste enthalten ist, und einen Index i mit $a = a_i$ zu bestimmen, kann man wie folgt vorgehen: Powerpoint 29

1. Setze $m \leftarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
2. Falls $a = a_m$ ist, gib m als Index von a aus und beende.
3. Falls $a < a_m$, betrachte von nun an die Liste $A \leftarrow (a_1, \ldots, a_{m-1})$.
4. Falls $a > a_m$, betrachte von nun an die Liste $A \leftarrow (a_{m+1}, \ldots, a_n)$.
5. Wenn das neue A leer ist, so ist a nicht in der ursprünglichen Liste enthalten. Beende.
6. Wenn das neue A nicht leer ist, so setze $n \leftarrow \#A$ neu und fahre bei Schritt 1. fort.

Auf diese Weise findet man eine Antwort in höchstens $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ Vergleichen.

[10] engl. = *edge*

[11] $\#M$ bezeichnet die Anzahl der Elemente der Menge M.

Stetige Verzinsung

Wir betrachten ein Kapital K_0, das mit einem Zinssatz p für ein Jahr angelegt wird. Das Endkapital K_1 hängt davon ab, wie oft innerhalb des Jahres die bis dahin aufgelaufenen Zinsen dem Kapital zugeschlagen werden. Angenommen, dies geschieht n-mal in gleichmäßigen Abständen ($n = 2$ heißt halbjährlich, $n = 12$ monatlich, $n = 365$ täglich). Dann ist das Endkapital einschließlich Zinseszins

$$K_1(n) = K_0 \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n .$$

Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} K_1(n)$ ist allerdings nicht unbeschränkt, sondern ergibt sich zu Powerpoint 30

$$\begin{aligned} K_1 &:= \lim_{n\to\infty} K_1(n) = K_0 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n \\ &= K_0 \lim_{a\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{pa} = K_0 \cdot e^p, \end{aligned}$$

wie sich durch die Ersetzung $a := \frac{n}{p}$ ergibt.

Führt man die stetige Verzinsung über k Jahre hinweg fort, so wird das Endkapital durch

$$K_0 \cdot e^{kp}$$

gegeben.

3.5.5 Aufgaben

Aufgabe 3.16 : Zeichnen Sie je einen Binärbaum, der

- mehr Blätter hat als Knoten, die keine Blätter sind (Nicht-Blätter),
- genau so viele Blätter wie nicht Nicht-Blätter hat,
- mehr Nicht-Blätter als Blätter hat.

Aufgabe 3.17 : Welches ist die minimale, mittlere, maximale Anzahl von nötigen Vergleichen bei der binären Suche in einer $n = 2^m - 1$ Zahlen langen Zahlenliste, wenn die gesuchte Zahl *nicht* in der Liste enthalten ist? Bestimmen Sie diese Zahlen auch für den Fall, dass die Zahl in der Liste ist.

Aufgabe 3.18 : Um wieviel unterscheidet sich der Ertrag von €10 000 bei einem Zinssatz von 6.5% und täglicher Verzinsung vom Ertrag bei stetiger Verzinsung mit demselben Zinssatz (Laufzeit 1 Jahr)?

Kapitel 4

Differenzialrechnung

Ausgangspunkt der Differenzialrechnung ist der Versuch, die Geschwindigkeit, mit der sich Funktionswerte $f(x)$ ändern, wenn das Argument x wächst, zu definieren. Einen Ansatz dazu bietet der Differenzenquotient:

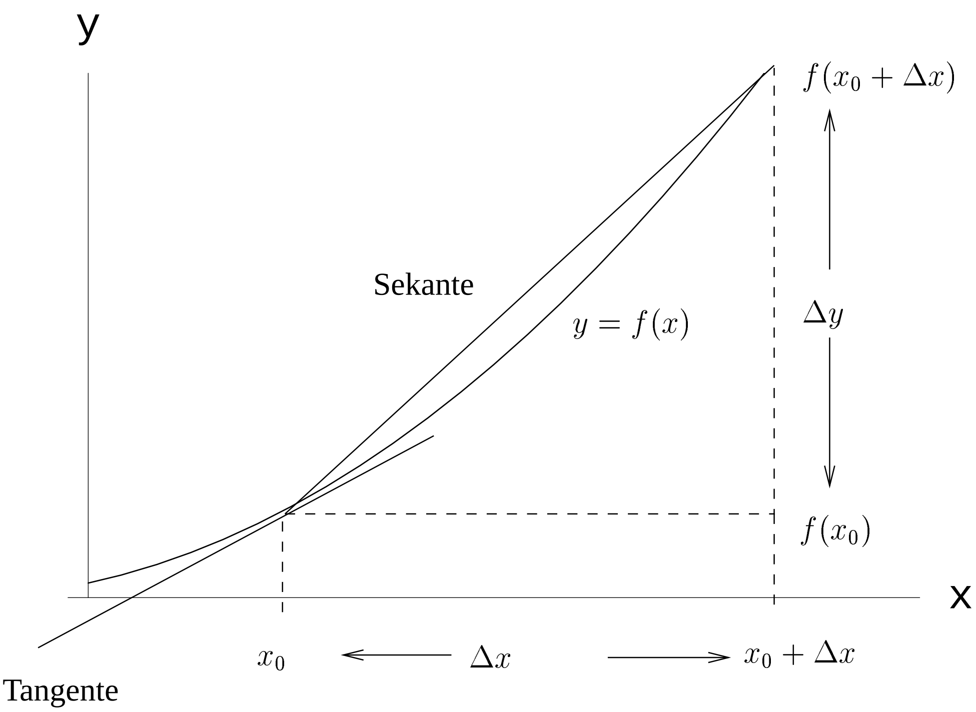


Abbildung 4.1: *Zur Definition der Ableitung*

Definition 4.0.3 *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in A$. Für eine Zahl $\Delta x \neq 0$ heißt*

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =: \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

der Differenzenquotient *von* f *in* x_0.

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ des Graphen von f, er gibt die durchschnittliche Änderungsgeschwindigkeit von $f(x)$ auf $[x_0, x_0 + \Delta]$ an.

4.1 Differenzierbarkeit

Wenn man sich für die momentane Änderungsgeschwindigkeit von $f(x)$ im Punkt x_0 interessiert, dann betrachtet man einfach ein Intervall $[x_0, x_0 + dx]$ mit infinitesimalem dx und dazu den Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx} := \frac{df}{dx}(x_0) := \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}.$$

Definition 4.1.1 *Falls es eine reelle Zahl* a *gibt mit*

$$\frac{df}{dx}(x_0) \simeq a$$

für jedes infinitesimale dx*, so heißt* f *in* x_0 differenzierbar, a *heißt* Ableitung *von* f *in* x_0.

Es ist unmittelbar klar, dass a nur existieren kann, wenn $f(x_0 + dx) - f(x_0) \simeq 0$ ist, da sonst der Differenzialquotient unbeschränkt ist. Man hat damit den

Satz 4.1.2 *Ist* f *in* x_0 *differenzierbar, so ist* f *in* x_0 *stetig.*

Powerpoint 32

Die Ableitung ist die Steigung der Tangente im Kurvenpunkt $(x_0, f(x_0))$, sie existiert genau dann, wenn es in diesem Punkt *eine und genau eine* Tangente gibt, die außerdem nicht senkrecht stehen darf.

Beispiel: Der Differenzialquotient von $f(x) = x^2$ berechnet sich so:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} = \frac{(x_0 + dx)^2 - x_0^2}{dx} = \frac{2x_0 dx + dx^2}{dx} \\ &= 2x_0 + dx \\ &\simeq 2x_0\end{aligned}$$

für jedes infinitesimale dx.

Gegenbeispiele: Die Funktion $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ *nicht* differenzierbar:

$$\frac{f(0 + dx) - f(0)}{dx} = \begin{cases} \frac{dx}{dx} & \text{für } dx > 0 \\ \frac{-dx}{dx} & \text{für } dx < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } dx > 0 \\ -1 & \text{für } dx < 0 \end{cases}.$$

Damit ist $|x|$ in 0 nicht differenzierbar. Graphisch zeigt sich dies darin, dass die Funktion bei 0 einen Knick und damit zwei Halb-Tangenten hat.

Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ hat in $x_0 = 0$ keinen Knick und ist dennoch dort nicht differenzierbar:

$$\frac{f(0+dx)-f(0)}{dx} = \frac{\sqrt[3]{dx}}{dx} = \left(\frac{1}{dx}\right)^{\frac{2}{3}},$$

und das ist unbeschränkt für infinitesimales dx .

Definition 4.1.3 *Ist $f : A \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt aus A differenzierbar, so ist durch*

$$f' : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{df}{dx}(x)\right)_{\mathrm{st}}$$

eine neue Funktion f' gegeben, die erste Ableitungsfunktion[1] *von f.*

Üblicherweise läßt man den Standardteil weg und schreibt einfach $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$.

Aus der Definition der Ableitung folgt unmittelbar:

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx + \varepsilon dx, \text{ mit } \varepsilon \text{ infinitesimal} .$$

Deshalb gilt auch für kleine $\Delta x \in \mathbb{R}$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Beispiel: Wie oben berechnet, hat $f(x) = x^2$ die erste Ableitung $f'(x) = 2x$.

Für eine kompliziertere differenzierbare Funktion $f(x)$ sind in Abb. 4.2 $f(x)$ und $f'(x)$ einander gegenübergestellt.

Satz 4.1.4 *Die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen entnehme man folgender Tabelle (c ist eine von x unabhängige Konstante, $a \in \mathbb{R}$ beliebig,*

[1] kurz: erste Ableitung

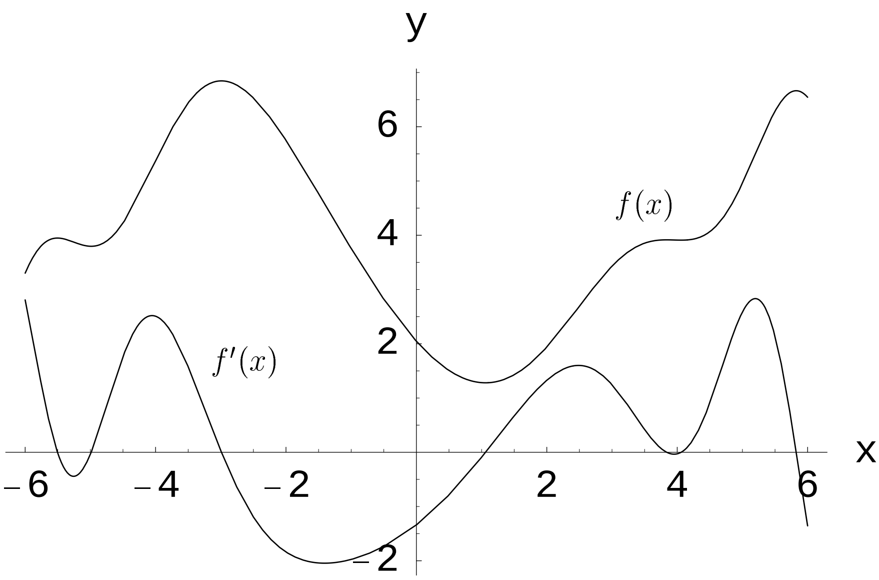


Abbildung 4.2: *Vergleich von Funktion und erster Ableitung*

aber so, dass die Funktion definiert ist):

$Funktion$	$Ableitung$
c	0
x^a	ax^{a-1}
$\frac{1}{x^a}$	$-a\frac{1}{x^{a+1}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
x^x	$x^x(\ln x + 1)$

Die folgenden Ableitungen sind Folgerungen aus der Kettenregel im Satz4.1.5:

$Funktion$		$Ableitung$
$f : A \to \mathbb{R}^+,$	$\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$f : A \to \mathbb{R}_{>0},$	$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$f : A \to \mathbb{R},$	$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$
$f : A \to \mathbb{R},$	$a^{f(x)},\ a > 0$	$f'(x)a^{f(x)} \ln a$

Satz 4.1.5 *Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Dann gilt (sofern die Ausdrücke existieren)*

$$\begin{aligned}
(a \cdot f)' &= a \cdot f' && \text{für } a \in \mathbb{R} \\
(f \pm g)' &= f' \pm g' && \\
(f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' && \text{(Produktregel)} \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} && \text{(Quotientenregel)} \\
(f \circ g)'(x) &= f' \circ g(x) \cdot g'(x) && \text{(Kettenregel)} \\
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} &&
\end{aligned}$$

Beweis der Produktregel (zur Abkürzung wird $x^* := x + dx$ gesetzt):

$$\begin{aligned}
d(f \cdot g) &= (f \cdot g)(x^*) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x^*)g(x^*) - f(x)g(x) \\
&= (f(x^*) - f(x)) \cdot g(x^*) + f(x) \cdot (g(x^*) - g(x)) \\
&= df \cdot g(x^*) + f(x) \cdot dg,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{d(f \cdot g)}{dx}(x) &= \frac{df}{dx}(x)g(x^*) + f(x)\frac{dg}{dx}(x) \\
&\simeq f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

■

Beweis der Kettenregel: zuerst wird $dg := g(x^*) - g(x)$ gesetzt. dg ist infinitesimal, weil g stetig ist.

$$\begin{aligned}
\frac{d(f \circ g)}{dx}(x) &= \frac{f(g(x^*)) - f(g(x))}{g(x^*) - g(x)} \cdot \frac{g(x^*) - g(x)}{dx} \\
&\simeq f'(g(x)) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

■

Definition 4.1.6 (höhere Ableitungen) *Wenn die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ selbst wieder differenzierbar ist, so kann man die* zweite Ableitung f'' *von f als Ableitung von f' bilden. Entsprechend werden* höhere *Ableitungen f''', $\quad f^{(IV)}$, $\quad f^{(V)}, \ldots$ gebildet.*

Beispiel: Die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat keine zweite Ableitung:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Es ist nämlich $f'(x) = 2|x|$ im Nullpunkt nicht differenzierbar.

4.1.1 Aufgaben

Aufgabe 4.1 : Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $y = \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$ (mit der Produktregel)

b) $y = \dfrac{2x^3 - 6x - 10}{3x^2 - 3x + 5}$ (mit der Quotientenregel)

c) $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} + (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

d) $y = x^2 e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{x} e^{-2x+3}$

e) $y = e^x \ln x$

f) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$

g) $y = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$

h) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

i) $y = \sqrt[x]{x}$

Aufgabe 4.2 : Beweisen Sie, dass

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

überall differenzierbar ist.

Aufgabe 4.3 : Berechnen Sie die erste bis dritte Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad y = \ln x^2 \\ &\text{b)} \quad y = x^{\frac{1}{3}} \\ &\text{c)} \quad y = xe^x \end{aligned}$$

4.2 Kurvendiskussion

Definition 4.2.1 *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $I = [a, b] \subseteq A$ ein Intervall, $x_e, x_w \in A$.*

1. *f heißt* monoton wachsend (fallend) *auf I*

$$\iff \quad x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (bzw. } f(x_1) \geq f(x_2))$$

   für $x_1, x_2 \in I$.

2. *f heißt* konvex (konkav) *auf I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ die Sekante durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ nicht unterhalb (nicht oberhalb) des Graphen $G(f)$ verläuft, d.h.*

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

   bzw.

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

   Wird in 1. und 2. jeweils $\leq$ und $\geq$ durch $<$ bzw. $>$ ersetzt, so spricht man von streng monoton *bzw. von* streng konvex (konkav).

3. *x_e heißt* lokales Maximum, *wenn sich der Verlauf von $G(f)$ für wachsende x-Werte beim Durchgang durch x_e von streng monoton wachsend in streng monoton fallend ändert.*

4. *x_e heißt* lokales Minimum, *wenn sich der Verlauf von $G(f)$ für wachsende x-Werte beim Durchgang durch x_e von streng monoton fallend in streng monoton wachsend ändert.*

5. *x_w heißt* Wendepunkt, *wenn sich in x_w der Verlauf von $G(f)$ von streng konvex zu streng konkav oder von streng konkav zu streng konvexändert.*

Lokale Minima und lokale Maxima heißen auch lokale Extrema.

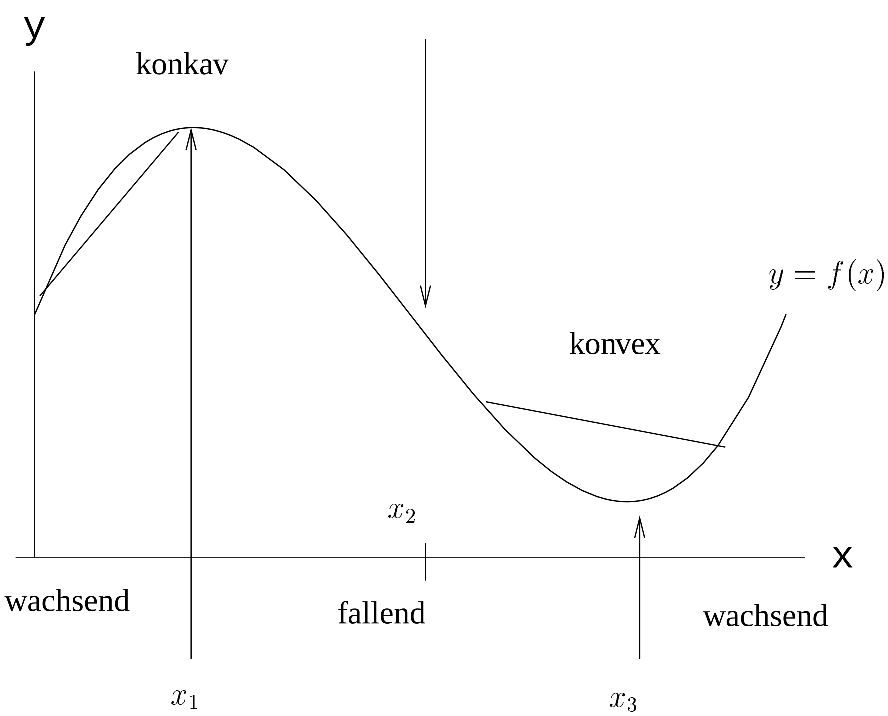


Abbildung 4.3: *Minimum in x_3, Maximum in x_1, Wendepunkt in x_2*

Satz 4.2.2 *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:*

a)	*f ist monoton fallend auf I*	$\Longleftrightarrow$	$f'(x) \leq 0$ *auf* I,
	f ist monoton wachsend auf I	$\Longleftrightarrow$	$f'(x) \geq 0$ *auf* I,
	f ist streng monoton fallend auf I	$\Longleftarrow$	$f'(x) < 0$ *auf* I,
	f ist streng monoton wachsend auf I	$\Longleftarrow$	$f'(x) > 0$ *auf* I,
b)	*f ist konkav auf I*	$\Longleftrightarrow$	$f''(x) \leq 0$ *auf* I,
	f ist konvex auf I	$\Longleftrightarrow$	$f''(x) \geq 0$ *auf* I,
	f ist streng konkav auf I	$\Longleftarrow$	$f''(x) < 0$ *auf* I,
	f ist streng konvex auf I	$\Longleftarrow$	$f''(x) > 0$ *auf* I,
c)	*x_e ist lokales Extremum*	$\Longrightarrow$	$f'(x_e) = 0$,
d)	*x_w ist Wendepunkt*	$\Longrightarrow$	$f''(x_e) = 0$.

Satz 4.2.3 *Für eine genügend oft differenzierbare Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ und ein $x_0 \in A$ sei*

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \text{ für ein } n \geq 2, \;\; \text{aber } f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ für } 2 \leq k < n.$$

Dann ist x_0

- *eine Extremstelle, wenn* n *gerade ist und* $f'(x_0) = 0$*;*
  es handelt sich um
  - *ein lokales Minimum für* $f^{(n)}(x_0) > 0$,
  - *ein lokales Maximum für* $f^{(n)}(x_0) < 0$*;*
- *ein Sattelpunkt, wenn* n *ungerade ist und* $f'(x_0) = 0$,
- *ein Wendepunkt, wenn* n *ungerade ist und* $f'(x_0) \neq 0$.

Sattelpunkte sind Wendepunkte, in denen die Tangente an die Funktion waagerecht ist.

Der Satz führt nicht immer zu einer Entscheidung, so ist

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar und $f^{(n)}(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen $e^x > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist aber klar, dass 0 ein (absolutes) Minimum der Funktion ist.

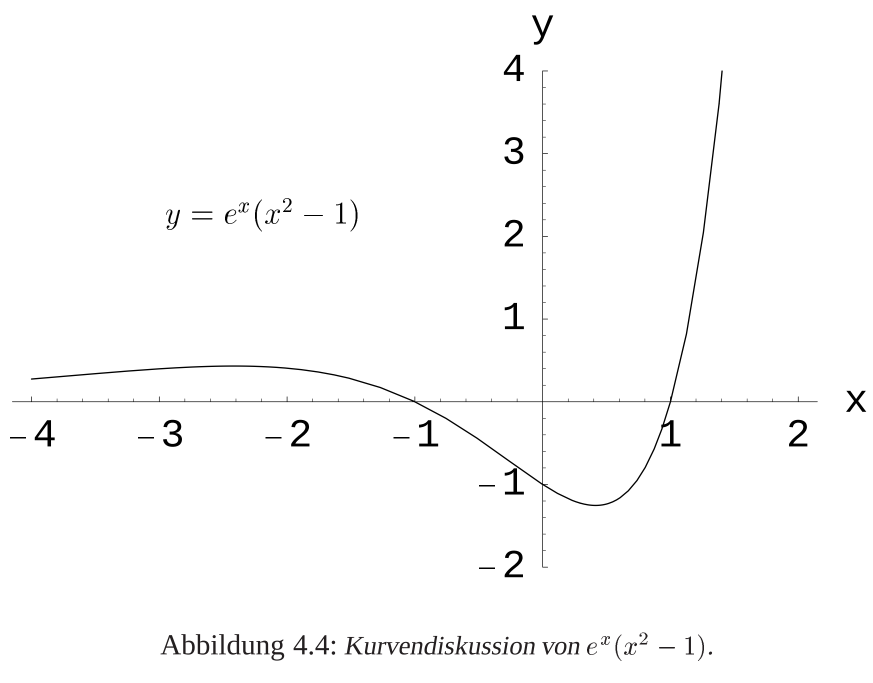


Abbildung 4.4: *Kurvendiskussion von* $e^x(x^2 - 1)$.

Beispiel: Kurvendiskussion von $f(x) = e^x(x^2 - 1)$

Nullstellen: Zu lösen ist die Gleichung

$$e^x(x^2-1)=0 \Longrightarrow e^x=0 \vee x^2-1=0.$$

Da die Exponentialfunktion den Wert Null nicht annimmt, bleibt die Gleichung
$x^2-1=0$ mit den Nullstellen $\underline{x_1=-1}$ und $\underline{x_2=1}$.

Extremstellen: Die erste Ableitung ist $=0$ zu setzen:

$$f'(x)=e^x(x^2-1)+e^x\cdot 2x=e^x(x^2+2x-1) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} e^x(x^2+2x-1) &= 0 \quad \Longrightarrow \\ (x^2+2x-1) &= 0, \end{aligned}$$

daraus nach 2, Seite 46

$$x_{e_{1,2}}=-1\pm\sqrt{2}$$

$$x_{e_1}=0.41421, \qquad x_{e_2}=-2.41421,$$

sind Kandidaten für Extremstellen.
Prüfung der hinreichenden Bedingungen aus Satz 4.2.3:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x(x^2+2x-1)+e^x(2x+2)=e^x(x^2+4x+1) \\ f''(x_{e_1}) &= 4.2799>0 \Longrightarrow \textbf{Minimum} \\ f''(x_{e_2}) &= -0.25297<0 \Longrightarrow \textbf{Maximum} \end{aligned}$$

Wendepunkte: Die zweite Ableitung ist $=0$ zu setzen:

$$\begin{aligned} e^x(x^2+4x+1) &= 0 \quad \Longrightarrow \\ x^2+4x+1 &= 0, \end{aligned}$$

daraus

$$x_{w_{1,2}}=-2\pm\sqrt{3}$$

$$x_{w_1}=-0.26790, \qquad x_{w_2}=-3.73205,$$

sind Kandidaten für Wendepunkte.
Prüfung der hinreichenden Bedingungen aus Satz 4.2.3:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= e^x(x^2+6x+5) \\ f'''(x_{w_1}) &= 2.65019>0 \Longrightarrow \textbf{Wendepunkt} \\ f'''(x_{w_2}) &= -0.08294<0 \Longrightarrow \textbf{Wendepunkt} \end{aligned}$$

Intervalle fallend/wachsend:

Zu betrachten sind die Intervalle, in die $D(f)$ durch die Extremstellen zerlegt wird: die Funktion ist auf

$(-\infty, x_{e_2}]$	**wachsend**, da x_{e_2} ein Maximum ist,
$[x_{e_2}, x_{e_1}]$	**fallend**, da x_{e_2} ein Maximum ist,
$[x_{e_1}, \infty)$	**wachsend**, da x_{e_1} ein Minimum ist.

Intervalle konkav/konvex:

Zu betrachten sind die Intervalle, in die $D(f)$ durch die Wendepunkte zerlegt wird: die Funktion ist auf

$(-\infty, x_{w_2}]$	**konvex**, da sie im Folgeintervall konkav ist,
$[x_{w_2}, x_{w_1}]$	**konkav**, da das Maximum x_{e_2} darin liegt,
$[x_{w_1}, \infty)$	**konvex**, da das Minimum x_{e_1} darin liegt.

(Siehe Abb. 4.4.)

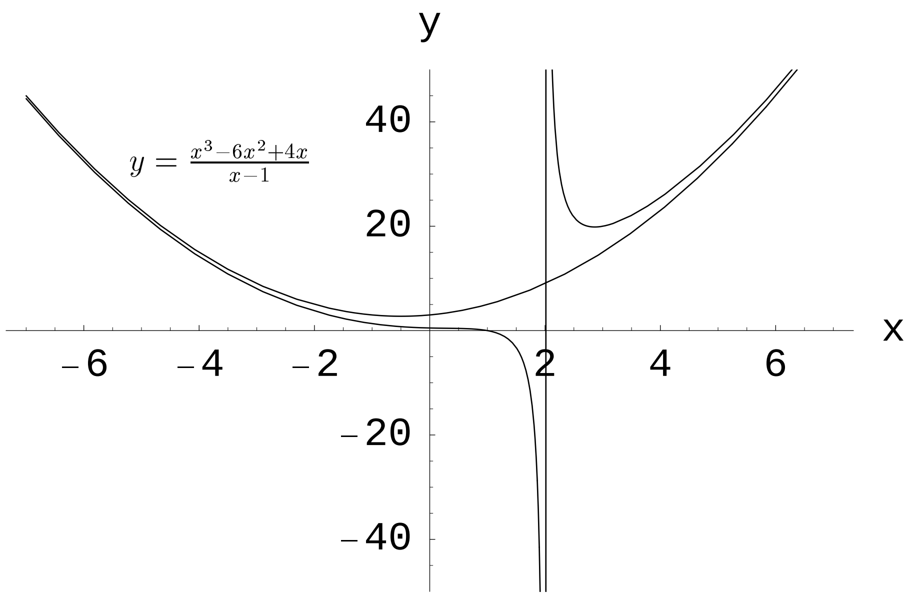


Abbildung 4.5: *Kurvendiskussion einer rationalen Funktion*

Beispiel: Kurvendiskussion von $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 4x}{x - 1}$:

Definitionsbereich: Die Nullstelle des Nenners ist $x_p = 1 \Longrightarrow \underline{D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$.

Polstellen: x_p ist keine Nullstelle des Zählers, daher ist x_p eine **Polstelle**.

Nullstellen: Die Nullstellen von f sind die Nullstellen $\underline{x_1 = 0}$, $\underline{x_2 = 3 - \sqrt{5}}$ und $\underline{x_3 = 3 + \sqrt{5}}$ des Zählers.

Asymptote: Mittels des Hornerschemas oder durch Polynomdivision findet man

$$f(x) = x^2 - 5x - 1 - \frac{1}{x-1}, \tag{4.1}$$

also $\underline{r(x) = x^2 - 5x - 1}$.

Extremstellen: Aus 4.1 erhält man

$$f'(x) = 2x - 5 + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}{(x-1)^2}.$$

Aus der Gleichung $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$ erhält man die Kandidaten $x_{e_1} = x_{e_2} = 2$ und $x_{e_3} = 1/2$. Die weiteren Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 - \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 4}{(x-1)^3} \\ f'''(x) &= \frac{6}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x_{e_1}) &= f''(x_{e_2}) = 0, \\ f'''(x_{e_1}) &= f'''(x_{e_2}) = 6 \neq 0 \Longrightarrow \textbf{Sattelpunkt} \\ f''(x_{e_3}) &= 18 > 0 \Longrightarrow \textbf{Minimum} \end{aligned}$$

Wendepunkte: Die Gleichung $f''(x) = 0$, also $2x^3 - 6x^2 + 6x - 4 = 0$ hat außer $x_w = 2$ (siehe oben) keine weiteren reellen Lösungen. x_w ist, wie schon gesehen, ein **Wendepunkt**.

Intervalle: die Funktion ist auf

$(-\infty, 1/2]$	**fallend**, da $1/2$ ein Minimum ist,
$[1/2, 1)$	**wachsend**, aus dem gleichen Grund,
$(1, \infty)$	**wachsend**, Polstelle in 1 hat ungerade Ordnung,

$(-\infty, 1)$	**konvex**, enthält Minimum bei $1/2$.
$(1, 2]$	**konkav**, siehe Folgeintervall,
$[2, \infty)$	**konvex**, da die Asymptote $r(x)$ konvex ist.

(Siehe Abb. 4.5.)

4.2.1 Aufgaben

Powerpoint 31

Aufgabe 4.4 : Jemand hat neben seinem regulären, von Jahr zu Jahr gleichen Gehalt g eine Sondereinnahme d zu versteuern. Die Steuern berechnen sich dabei aus dem Gesamteinkommen e eines Jahres durch Anwendung der Steuerfunktion $s(e)$. Es stellt sich heraus, dass es steuerlich günstiger ist, d auf zwei Jahre zu verteilen und in zwei Jahren jeweils $g + \frac{d}{2}$ zu versteuern, als in einem Jahr $g + d$ und im nächsten g. Auf welche Eigenschaft der Steuerfunktion ist das zurückzuführen? Ist diese Eigenschaft für die wirkliche Steuerfunktion erfüllt?

Aufgabe 4.5 : Bestimmen Sie Nullstellen und Extremstellen für die Funktionen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & y = (x^2 - 3x + 2) \cdot (x - 1)^3 \\ \text{b)} & y = e^{3x-2} \cdot (9x^2 - 10x + 1) \end{array}$$

Aufgabe 4.6 : Bestimmen Sie Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte für die Funktion

$$y = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$$

Aufgabe 4.7 : Das Polynom $p(x)$ mit $\deg(p) > 2$ habe in x_0 eine doppelte Nullstelle. Entscheiden Sie, ob $p(x)$ in x_0 ein Extremum oder einen Wendepunkt hat.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $p(x) = (x - x_0)^2 p_1(x)$ geschrieben werden kann mit $p_1(x_0) \neq 0$ und wenden Sie die Produktregel an.

Aufgabe 4.8 : Eine Funktion $f(x)$ heißt *ertragsgesetzliche Produktionsfunktion*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $f(0) = 0$,
2. f ist auf dem Intervall $(0, x_1)$ streng monoton wachsend und konvex,
3. f ist auf dem Intervall (x_1, x_2) streng monoton wachsend und konkav,
4. f ist auf dem Intervall (x_2, ∞) streng monoton fallend und konkav,
5. f hat in x_3 eine Nullstelle.

$0 < x_1 < x_2 < x_3$ sind dabei 3 für die Funktion charakteristische Stellen. Wenn f die Gestalt

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

hat, welche Bedingungen müssen die Koeffizienten $a,\ b,\ c$ und d dann erfüllen?

Aufgabe 4.9 : Führen Sie für die folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = \dfrac{3x + 2}{x + 4} \\ \text{b)} & f(x) = \dfrac{3x + 2}{(x + 4)^2} \\ \text{c)} & f(x) = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x + 1}} \end{array}$$

Aufgabe 4.10 : Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

die folgenden Eigenschaften hat:

1. Für sehr große x ist $f(x) \approx 1$.
2. Für sehr kleine x ist $f(x) \approx x$.
3. $f(x)$ ist monoton wachsend.
4. Das Intervall $[0, \infty]$ wird durch f auf $[0, 1]$ abgebildet.

Aufgabe 4.11 : Finden Sie eine Funktion, die ähnlich gebaut ist, wie die in Aufgabe 4.10 gegebene, für die gilt:

1. Für sehr große x ist $f(x) \approx 6$.
2. Für sehr kleine x ist $f(x) \approx 2x$.

Aufgabe 4.12 : Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

die folgenden Eigenschaften hat:

1.
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1,$$
2.
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1,$$
3. $f(x)$ ist monoton wachsend,
4. $f(x)$ ist konvex für $x < 0$, und konkav für $x > 0$.

Aufgabe 4.13 : Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{a}},$$

wobei $a > 0$ eine feste reelle Zahl ist.

1. Welche Symmetrieeigenschaften hat der Graph von f?
2. Finden Sie die Extremstellen und die Wendepunkte.
3. Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\infty$?
4. Was ist anders, wenn $a < 0$ ist?

5. Was ist anders für die Funktion

$$f(x) = e^{C-\frac{x^2}{a}},\ (a > 0),$$

   wobei C eine beliebige reelle Zahl ist?

6. Ändern Sie die Funktion geringfügig so ab, dass eine Extremstelle bei $x = 1$ liegt.

Aufgabe 4.14 : Betrachten Sie die Funktion

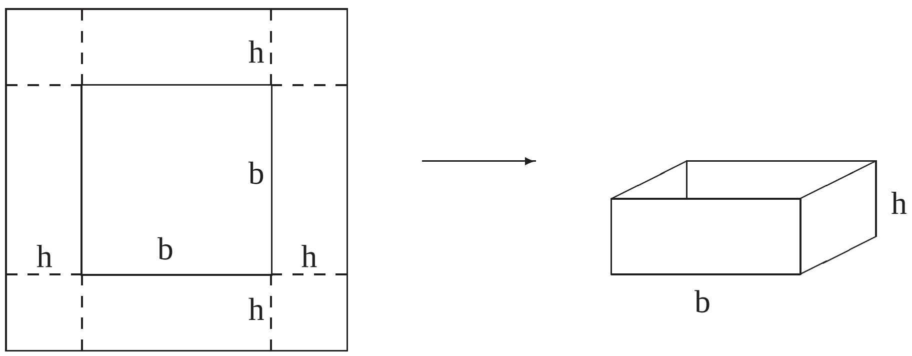
$$f(x) = \frac{C}{a + x^2},$$

wobei $a, C \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest gewählt sind.

1. Sieht der Graph für $a < 0$ wesentlich anders aus als für $a > 0$?
2. Bestimmen Sie Extremstellen und Wendepunkte.
3. Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\infty$?

Aufgabe 4.15 : Aus einem quadratischen Stück Pappe der Seitenlänge 45 cm soll eine Schachtel gefaltet werden, indem am Rand vier kleine Quadrate der Seitenlänge h herausgeschnitten und die Seitenwände hochgeklappt werden. Wenn die Seitenlänge des inneren Quadrates mit b bezeichnet wird, dann gilt

$$2h + b = 45 \text{ cm}$$

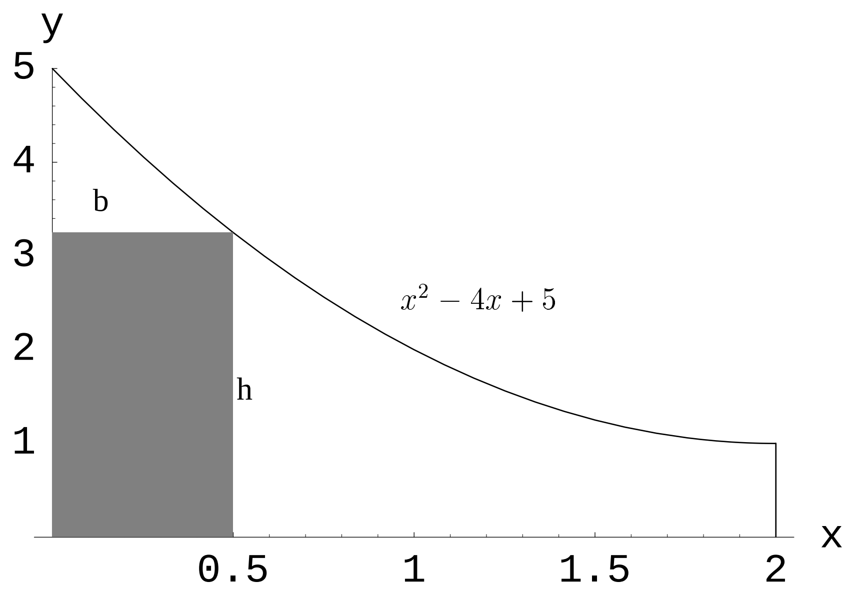


Das Volumen der Schachtel,

$$V = b^2 \cdot h,$$

soll maximiert werden, wie sind b und h zu wählen?

Aufgabe 4.16 : Aus dem abgebildeten Stück Abfallblech ist ein Rechteck so auszuschneiden, dass die Fläche desselben möglichst groß wird.



Das Blechstück ist begrenzt durch die y-Achse, die x-Achse, die Parallele zur y-Achse durch $x = 2$, und durch den Graphen der Funktion $y = x^2 - 4x + 5$. Die Rechteckfläche ist $F = bh$, wenn b die Breite und h die Höhe ist.

Aufgabe 4.17 : Lösen Sie die Aufgabe 5.21 von Seite 119.

4.3 Elastizität

Die Ableitung einer Funktion erlaubt Aussagen darüber, um wieviel sich der Funktionswert $y = f(x)$ ändert, wenn sich die unabhängige Größe x um einen bestimmten Betrag ändert:

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x.$$

Hierbei sind Δy und Δx im allgemeinen mit Maßeinheiten versehen. Die Ableitung $f'(x)$ ist daher auch ein Verhältnis absoluter Werte und ebenfalls mit einer Maßeinheit versehen.

Häufig sind aber nicht so sehr die absoluten, sondern mehr die relativen Größen relevant, d.h. es stellt sich die Frage, um wieviel Prozent sich $y = f(x)$ ändert, wenn sich die unabhängige Größe x um einen bestimmten Prozentsatz ändert. Die relative Änderung von x bei einer absoluten Änderung um Δx ist

$$\frac{\Delta x}{x},$$

die relative Änderung von y ist dann

$$\frac{\Delta y}{y}.$$

Setzt man die relativen Änderungen zueinander ins Verhältnis und geht zu einer infinitesimalen Änderung dx von x über, so definiert man:

Definition 4.3.1 ((Punkt-)Elastizität) *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$.*

$$\varepsilon_{f,x}(x_0) := \frac{df}{f} / \frac{dx}{x}(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0$$

heißt Elastizität *von f bezüglich x im Punkt x_0. Sie ist dimensionslos, d.h. trägt keine Maßeinheit.*

Beispiel: Die Nachfrage nach einer Ware N, gemessen in kg, hängt vom Preis p, gemessen in DM, ab. Es gilt

$$N(p) = -40p + 560 \text{ für } p \in [0, 14].$$

Damit ist

$$\varepsilon_{N,p} = \frac{N'(p)}{N(p)} p = \frac{-40}{-40p + 560} p.$$

Definition 4.3.2 *Eine Funktion $f(x)$ heißt an der Stelle $x_0 \in D(f)$* elastisch, *wenn $|\varepsilon_{f,x}(x_0)| > 1$ ist. Sie heißt* unelastisch *für $|\varepsilon_{f,x}(x_0)| < 1$.*

Für $p = 10$ DM ist $\varepsilon_{N,p} = -0.25$, d.h. eine Zunahme des Preises um 1% ergibt eine Abnahme der Nachfrage um $\frac{1}{4}$%. Sie ist damit geringer, als die Preisänderung. Die Nachfrage ist unelastisch.

Für $p = 13,50$ DM ist $\varepsilon_{N,p} = -2$, d.h. eine Zunahme des Preises um 1% ergibt eine Abnahme der Nachfrage um 2%. Sie ist damit größer, als die Preisänderung. Die Nachfrage ist elastisch.

Für $p = 13$ DM ist $\varepsilon_{N,p} = -1$, d.h. eine Zunahme des Preises um 1% ergibt eine Abnahme der Nachfrage um 1%. Sie ist damit genauso groß, wie die Preisänderung.

Powerpoint 33

4.3.1 Aufgaben

Aufgabe 4.18 : Der Gewinn $G(p)$ beim Verkauf einer Ware hängt vom Preis p ab. Es ist $G(p) = -\frac{1}{2}p^3 + 4p^2$ und $p \in (0, 8)$.

1. Bestimmen Sie $\varepsilon_{G,p}(p_0)$.
2. Um wieviel Prozent ändert sich der Gewinn näherungsweise, wenn sich der Preis von 4 DM um 2% erhöht?
3. Für welche Preise ist der Gewinn elastisch, für welche unelastisch?

Aufgabe 4.19 : Zeigen Sie, dass für eine Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^a$ die Elastizität für alle x konstant ist.

4.4 Newtonverfahren

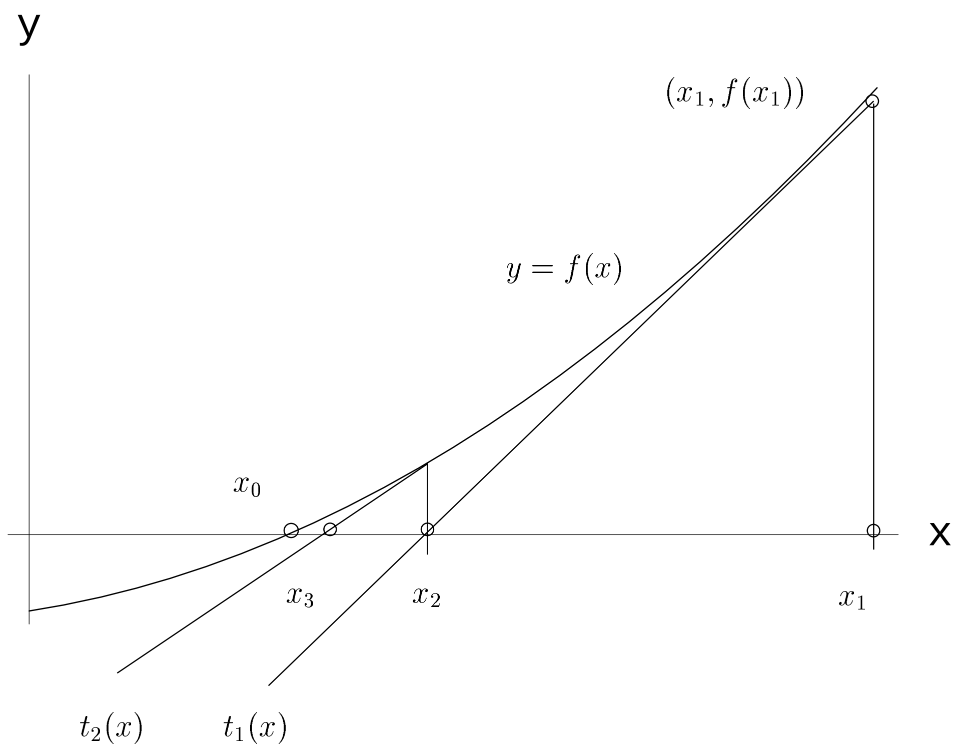


Abbildung 4.6: *Das Newtonverfahren*

Das Newtonverfahren ist ein iteratives Näherungsverfahren zur Bestimmung der reellen Nullstellen von Funktionen, bei dem ausgehend von einer ungefähren Lösung x_1 der Gleichung $f(x) = 0$ eine bessere gefunden wird:

1. Setze $n = 1$.

2. Die Gleichung der Tangente an $f(x)$ in x_n wird aufgestellt:

$$t_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

3. Der Schnittpunkt x_{n+1} von $t_n(x)$ mit der x-Achse ist eine bessere Annäherung an die gesuchte Nullstelle als x_n:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. Wenn die gewünschte Stellenzahl der Nullstelle erreicht ist, Ende des Verfahrens, ansonsten $n \leftarrow n + 1$ und weiter bei 2.

Beispiel: Gesucht eine Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$.

1. Suche nach einer Näherungslösung mittels Wertetabelle:

x	0	1	2
$f(x)$	-2	-1	2

   daraus als Startwert $x_1 = 1.5$.

2. Aufstellen der Iterationsvorschrift:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

3. Anwenden der Iterationsvorschrift:

n	1	2	3	4	5
x_n	1.5	1.417	1.414216	1.414213562	1.414213562

Bereits nach 4 Iterationsschritten ist 9-stellige Genauigkeit erreicht.

Beispiel: Bei ungeschickter Wahl des Startwertes kann das Newtonverfahren versagen und wie in folgendem Fall in einen Zyklus geraten. Für $f(x) = 5x^3 - x$ erhält man als Iterationsvorschrift
$$x_{n+1} = \frac{10x_n^3}{15x_n^2 - 1},$$
und mit dem Startwert $x_0 = 0.2$ erhält man $x_1 = -0.2,\ x_2 = 0.2,\ \ldots$

Das Newtonverfahren konvergiert sehr rasch, sofern man nahe genug an der Nullstelle startet. Es ist stabil gegen Rundungsfehler.

4.4.1 Aufgaben

Aufgabe 4.20 : Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren eine Lösung der Gleichung für q
$$k \cdot (1 + q + q^2 + q^3) = K, \quad k = 1000, \quad K = 4506;$$
auf drei Nachkommastellen genau. (Das beantwortet die Frage, wie hoch der Zinssatz sein muss, damit jemand, der jedes Jahr am 1.1. 1000 € auf sein Sparkonto einzahlt, am 1.1. des vierten Jahres über 4506 € verfügen kann.)

Aufgabe 4.21 : Für eine Zahl $c > 0$ ist $s = {}^1\!/_c$ Nullstelle der Funktion $f(x) = {}^1\!/_x - c$. Stellen Sie die Iterationsformeln für das Newtonverfahren zur Berechnung von $s = {}^1\!/_c$ auf. Was fällt Ihnen bei diesen Formeln auf?

Aufgabe 4.22 : Starten Sie das Newtonverfahren für $x^3 - 48x + 30$ mit $x_1 = -3$, was passiert?

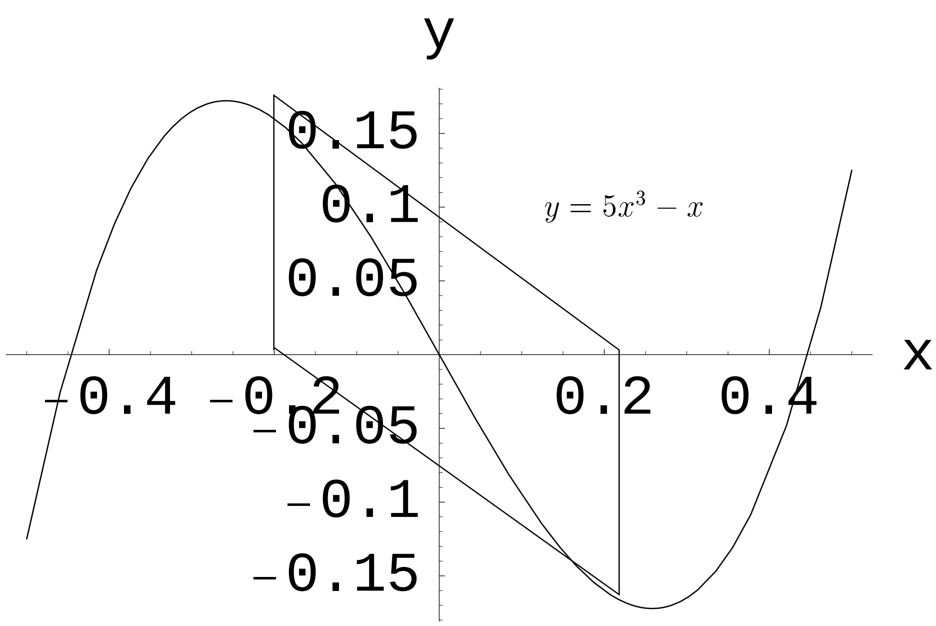


Abbildung 4.7: *Das Newtonverfahren gerät für $x_1 = -1$ in einen Zyklus*

4.5 l'Hospital'sche Regel[2]

Die Regel von l'Hospital ermöglicht die Berechnung von unbestimmten Ausdrücken folgender Art:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \ldots .$$

Dabei werden alle Ausdrücke auf die Behandlung von $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zurückgeführt.

Satz 4.5.1 *Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Für ein $a \in A$ gelte*

$$g'(x) \neq 0 \text{ für } x \simeq a,\ x \neq a$$

und

$$f(a) = g(a) = 0, \text{ oder } f(a) = g(a) = \infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

wenn einer der beiden Grenzwerte existiert. Ist einer der beiden Grenzwerte $= \infty$, dann auch der andere.

[2] gesprochen: „lopital“

Beweis: (nur für den Fall $f(a) = g(a) = 0$) Sei δ eine beliebige infinitesimale Zahl, $dx = \delta/2$, und $x = a + dx$. Dann ist

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \simeq \frac{\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}}{\frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}} \simeq \frac{\frac{f(x+dx)}{dx}}{\frac{g(x+dx)}{dx}} = \frac{f(x+dx)}{g(x+dx)} = \frac{f(a+\delta)}{g(a+\delta)},$$

denn wegen der Stetigkeit von f und g ist $f(x) \simeq 0 \simeq g(x)$. ■

Bemerkung: Die Aussage des Satzes gilt auch noch für $a = \infty$.

Für von $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ verschiedene Ausdrücke sind diese zunächst nach einem der folgendem Muster umzuformen:

Typ	Funktion	wird umgeformt zu
$\infty - \infty$	$f(x) - g(x)$	$\ln\left(\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}\right)$
$\infty - \infty$	$f(x) - g(x)$	$\frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/g(x) \cdot 1/f(x)}$
$0 \cdot \infty$	$f(x)g(x)$	$\frac{f(x)}{1/g(x)}$
$0^0,\ \infty^0$	$f(x)^{g(x)}$	$e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$

Der umgeformte Ausdruck ist dann von der Gestalt $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ oder in einen solchen nach einem anderen Eintrag umformbar.

Beispiele: Gesucht ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Satz 4.5.1 liefert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Die Regel von l'Hospital darf auch mehrfach angewendet werden:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{6} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Die Wachstumseigenschaften des Logarithmus lassen sich auch mit l'Hospital zeigen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Die Verwendung der Tabelle ist im folgenden Fall nötig:

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0} x\ln x}$$

wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion,

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0,$$

also

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$$

4.5.1 Aufgaben

Aufgabe 4.23 : Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^4-6x^2+3}{4x^3-6x^2+2} \\
\text{b)} & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x-\ln(x+1)} \\
\text{c)} & \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}, \quad m,n\in\mathbb{N} \\
\text{d)} & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{x} \\
\text{e)} & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} \\
\text{f)} & \displaystyle\lim_{x\to 1} \big(\ln(1-\sqrt{x})-\ln(1-x)\big)
\end{array}$$

4.6 Taylorpolynome

Das Newtonverfahren zeigte, dass man eine differenzierbare Funktion $f(x)$ sinnvoll in der Nähe einer Stelle x_0 durch ein lineares Polynom

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) =: T_1(x)$$

approximieren kann, das erste Taylorpolynom. Eine Verallgemeinerung sind die

Definition 4.6.1 (Taylorpolynome) *Sei $f(x)$ eine in x_0 n-mal differenzierbare Funktion. Dann gibt es genau ein Polynom $T_n(x)$ mit $\deg(T_n) = n$ und den Eigenschaften*[3]

$$f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0), \quad 0 \le k \le n.$$

[3] $f^{(0)}(x)$ steht für $f(x)$

Es hat die Gestalt

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k.$$

<u>Beispiel:</u> Es soll $T_5(x)$ berechnet werden für $f(x) = \ln x$ und an der Stelle $x_0 = 1$:

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(1)$
0	$\ln x$	0
1	x^{-1}	1
2	$-x^{-2}$	-1
3	$2x^{-3}$	2
4	$-6x^{-4}$	-6
5	$24x^{-5}$	24

Damit wird

$$\begin{aligned} T_5(x) &= \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 \\ &\quad + \frac{-6}{4!}(x-1)^4 + \frac{24}{5!}(x-1)^5 \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass für diese Funktion allgemein

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

gilt.

Satz 4.6.2 *Wenn $T_n(x)$ das Taylorpolynom n-ter Ordnung zu $f(x)$ an der Stelle x_0 ist, dann gilt*

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

Dabei steht $R_{n+1}(x)$ für die Abweichung des Taylorpolynoms vom wahren Funktionswert und heißt Restglied der Ordnung $n+1$*:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z) \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

mit einem bestimmten – wohldefinierten, aber i.a. unbekannten –

$$z \in \begin{cases} [x, x_0] \text{ für } x < x_0 \\ [x_0, x] \text{ für } x > x_0 \end{cases}.$$

Beispiel *(Fortsetzung):*

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + R_6(x),$$

daraus folgt mit $x = 2$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + R_6(2),$$

$$R_6(2) = \frac{1}{6!} f^{(6)}(z) \cdot (2-1)^6 = -\frac{1}{6z^6} \quad \text{mit } z \in [1,2].$$

Einsetzen des größtmöglichen und des kleinstmöglichen Wertes von z in $R_6(2)$ ergibt

$$-\frac{1}{384} \geq R_6(2) \geq -\frac{1}{6}.$$

Folglich ist

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{384} \geq \ln 2 \geq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6},$$

$$0.78073 \geq \ln 2 \geq 0.61667.$$

Das ist nicht sehr beeindruckend. Falls Sie einmal einen Logarithmus $\ln a$ brauchen und nur einen einfachen Taschenrechner mit Wurzelfunktion zur Hand haben, hilft folgender Trick:

1. Ziehen Sie so oft die Wurzel aus a, bis sie einen Wert $b = \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{a}}}$ erhalten haben, der zwischen 0.99 und 1.01 liegt,
2. merken Sie sich die Anzahl n gezogener Wurzeln,
3. berechnen Sie mit $c = b - 1$

$$2^n \left(c - \frac{c^2}{2} \right).$$

Das Ergebnis ist auf ca. 4 Dezimalstellen genau. Man erhält so für $a = 2$ mit $n = 7$ statt $\ln 2 = 0.693147818$ den Wert 0.693140378 .

In der folgenden Abbildung sind zum Vergleich die ersten 5 Taylorpolynome zu $f(x) = \ln x$ dargestellt.

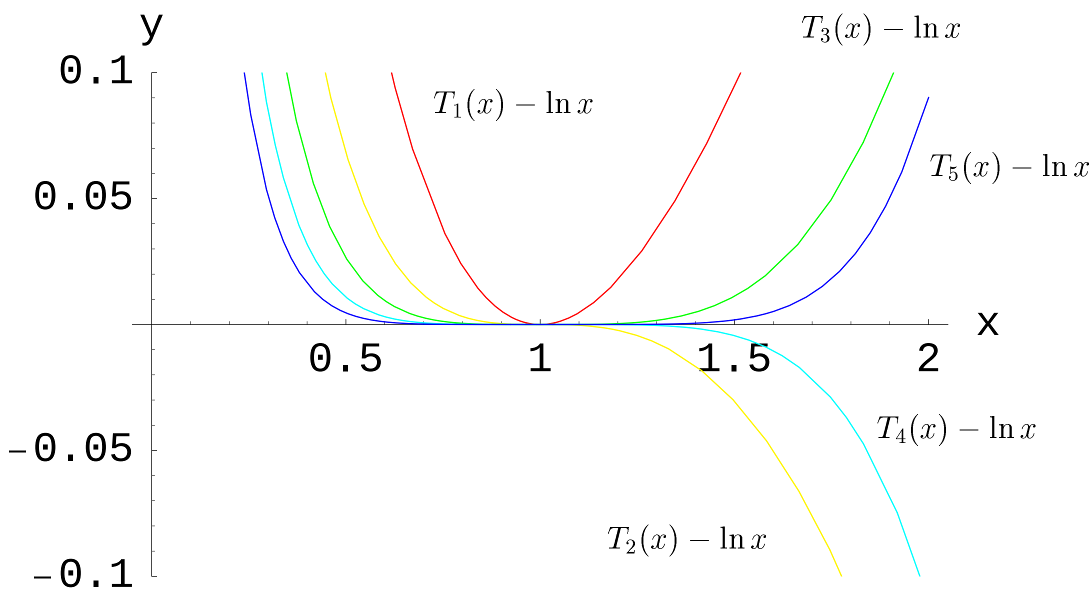


Abbildung 4.8: *Abweichungen der Taylorpolynome vom Logarithmus*

4.6.1 Aufgaben

Aufgabe 4.24 : Das Polynom $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$ soll in der Gestalt

$$p(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i(x-3)^i$$

geschrieben werden. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_4$.

Aufgabe 4.25 : Stellen Sie für $f(x) = \sqrt[5]{x}$ das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ auf für $x_0 = 1$, und führen Sie eine Restgliedabschätzung für $f(2)$ durch.

Aufgabe 4.26 : Begründen Sie das Verfahren zur Berechnung von Logarithmen auf Seite 82.

4.7 Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

Dieses Kapitel behandelt Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}}.$$

Wir beschränken uns auf $n = 2$, $\quad A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und schreiben

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

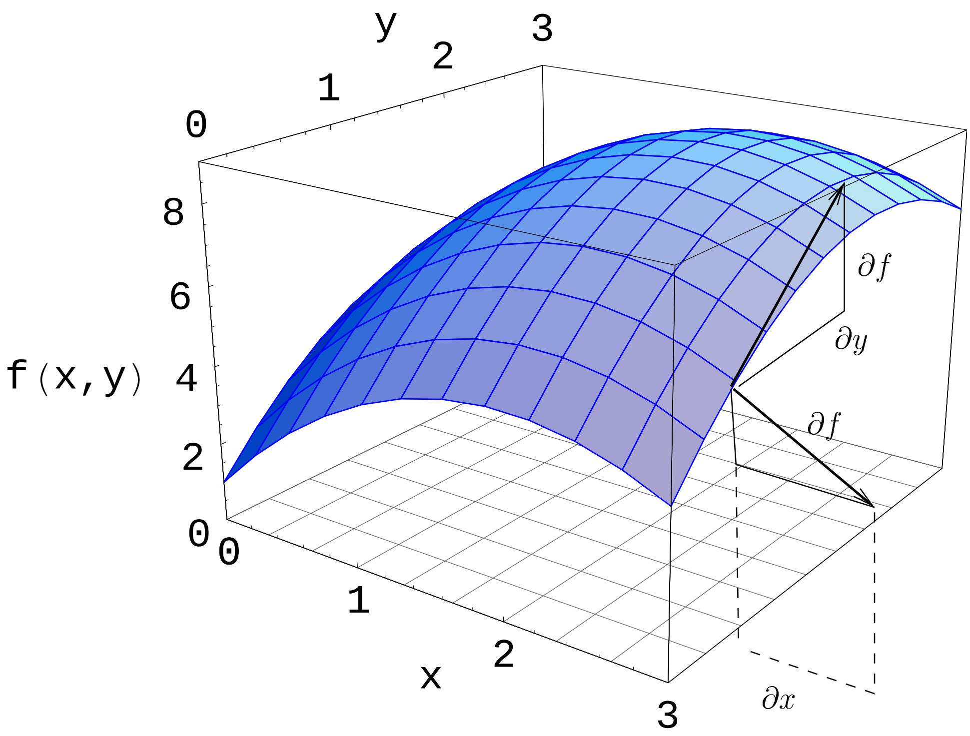


Abbildung 4.9: *Graph einer Funktion zweier Veränderlicher*

Abb. 4.9 zeigt den Graphen einer solchen Funktion als Fläche über der x-y-Ebene.

Für jedes feste $y_0 \in \mathbb{R}$ erhält man aus f eine Funktion einer Veränderlichen $x \mapsto f(x, y_0)$, analog für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ ebenso $y \mapsto f(x_0, y)$. Wenn diese Funktionen differenzierbar sind, dann definiert man

Definition 4.7.1 *Für eine Funktion zweier Veränderlicher $z = f(x, y)$ sind die* partiellen Ableitungen *an der Stelle (x_0, y_0) definiert durch*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \quad := \quad \left(\frac{f(x_0 + dx, y_0) - f(x_0, y_0)}{dx}\right)_{st} \qquad \textit{und}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) \quad := \quad \left(\frac{f(x_0,y_0+dy)-f(x_0,y_0)}{dy}\right)_{st},$$

sofern diese Standardteile existieren und von dx bzw. dy unabhängig sind.

Schreibweisen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y.$$

Höhere partielle Ableitungen werden analog definiert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad := \quad \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad := \quad \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right),$$

usw, und geschrieben

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+5xy^3-6y \\ f_x &= 2x+5y^3 \\ f_y &= 15xy^2-6 \\ f_{xx} &= 2 \\ f_{xy} &= 15y^2 \\ f_{yx} &= 15y^2 \\ f_{yy} &= 30xy \end{aligned}$$

Satz 4.7.2 *Wenn die partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} beide stetig sind, dann gilt*

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Die Funktion

$$z = f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

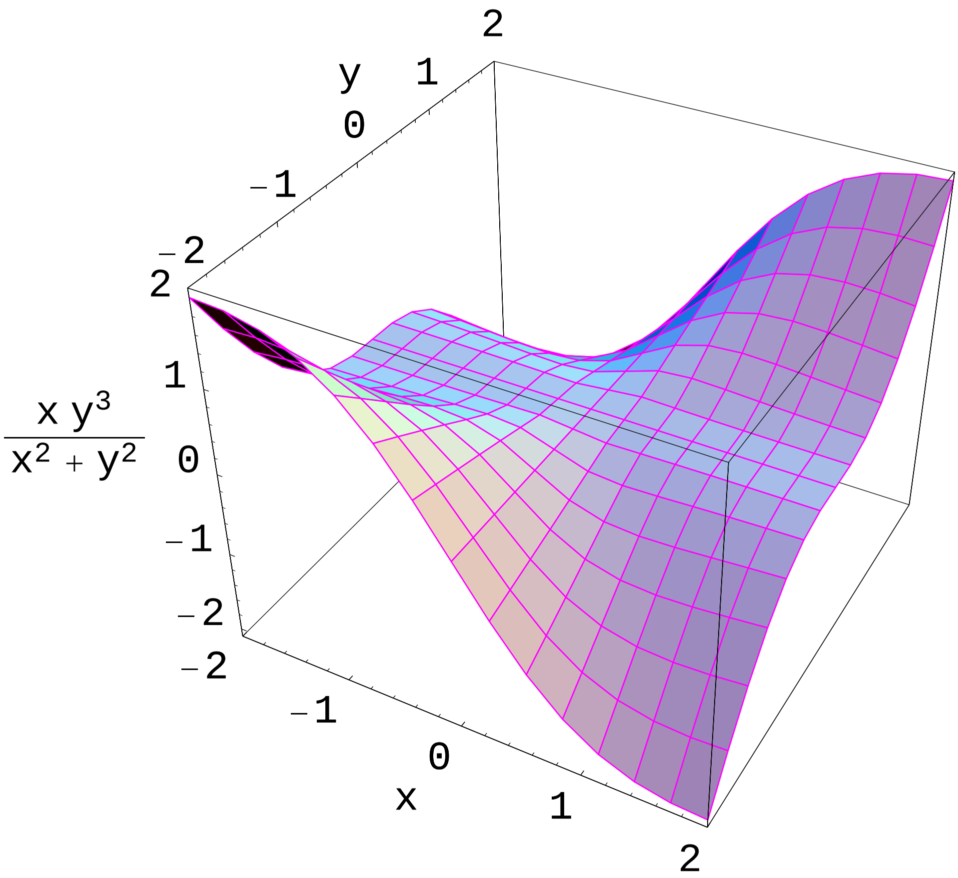


Abbildung 4.10: *Beispiel für unstetiges* f_{xy}

hat die Ableitungen

$$f_x = \frac{-y^3(x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0),$$

beide in $(0,0)$ stetig ergänzbar durch 0 und differenzierbar. Man erhält aber

$$f_x(0,y) = y \quad \Longrightarrow \quad f_{xy}(0,y) = \frac{d}{dy} y \equiv 1,$$
$$f_y(x,0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_{yx}(x,0) \equiv 0,$$

folglich

$$1 = f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0) = 0.$$

In der Tat ist außerhalb $(0,0)$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{-y^2(3x^4 - 6x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^3},$$

und diese Funktion ist im Nullpunkt unstetig. Abb. 4.10 gibt eine Anschauung von der komplizierten Unstetigkeit.

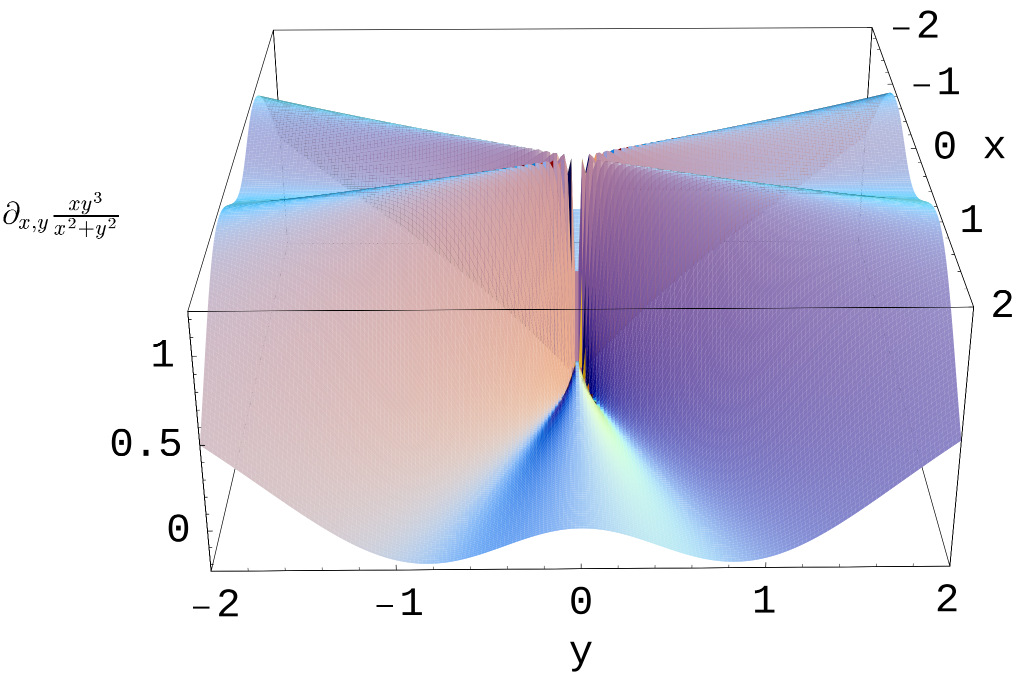


Abbildung 4.11: *Graph von f_{xy}*

Satz 4.7.3 *1. Eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum einer Funktion $z = f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) ist*

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

2. Wenn die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt ist, dann ist eine hinreichende Bedingung für ein Extremum

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0, y_0) > 0.$$

Weiter gilt dann:

$$\begin{array}{lcl} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 & \Longrightarrow & f \text{ hat ein lokales Maximum in } (x_0, y_0), \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 & \Longrightarrow & f \text{ hat ein lokales Minimum in } (x_0, y_0). \end{array}$$

3. Wenn die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt ist, und weiterhin gilt

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0, y_0) < 0,$$

dann liegt ein Sattelpunkt vor.

Mathematica $Satz4.7.3$

Es ist nicht leicht, notwendige und hinreichende Bedingungen für Extremstellen anzugeben. Insbesondere muss offenbleiben, wie der Fall $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0, y_0) = 0$ zu behandeln ist.

Ein Beispiel für einen Sattelpunkt zeigt die Abb. 4.12:

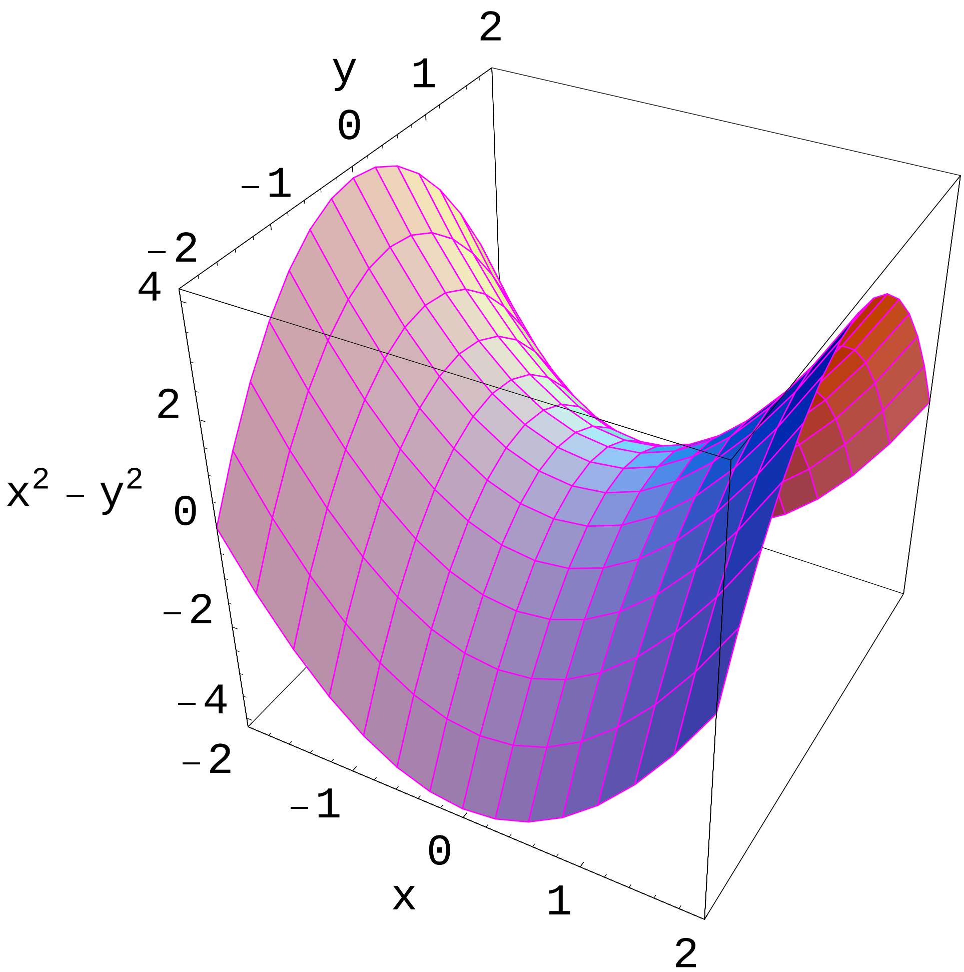


Abbildung 4.12: *Sattelpunkt der Funktion* $z = x^2 - y^2$

Hier ist

$$f_x = 2x, f_y = -2y, f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0,$$

aber es liegt offenbar kein Extremum vor.

Beispiel: Extremstellen der Funktion $z = x^3 - 3x + y^3 - 12y$

Partielle Ableitungen:

$$f_x = 3x^2 - 3, \qquad f_y = 3y^2 - 12,$$

daraus die notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} 3x_e^2 &= 3, \qquad & 3y_e^2 &= 12, \\ \Longrightarrow \quad x_e &= \pm 1, \qquad & y_e &= \pm 2. \end{aligned}$$

Prüfung der hinreichenden Bedingung:

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6y,$$

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy.$$

Für die 4 möglichen Punkte erhält man:

Punkt	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	f_{xx}	Ergebnis
$(1,2)$	$72 \quad > 0$	$6 \quad > 0$	Minimum
$(1,-2)$	$-72 \quad < 0$		Sattelpunkt
$(-1,2)$	$-72 \quad < 0$		Sattelpunkt
$(-1,-2)$	$72 \quad > 0$	$-6 \quad < 0$	Maximum

Die Abb. 4.13 verdeutlicht die Situation.

4.7.1 Aufgaben

Aufgabe 4.27 : Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ für die Funktion

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}xy.$$

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f(x)$.

Aufgabe 4.28 : Bestimmen Sie die relativen Extrema von

$$f(x,y) = 2x^3 + 4xy - 2y^3 + 5.$$

4.7.2 Anwendungen

partielle Elastizitäten werden analog zu den Elastizitäten bei einer Veränderlichen definiert. Beispielsweise kann die Nachfrage nach einem Produkt außer vom Produktpreis noch vom Preis alternativer Produkte abhängen. Für die Nachfrage nach Produkt $x_i,\ 1 \leq i \leq n$, sei die Nachfragefunktion

$$N_i(p_1, \ldots, p_n),$$

wobei p_i für den Preis von Produkt x_i steht. Man erhält dann die

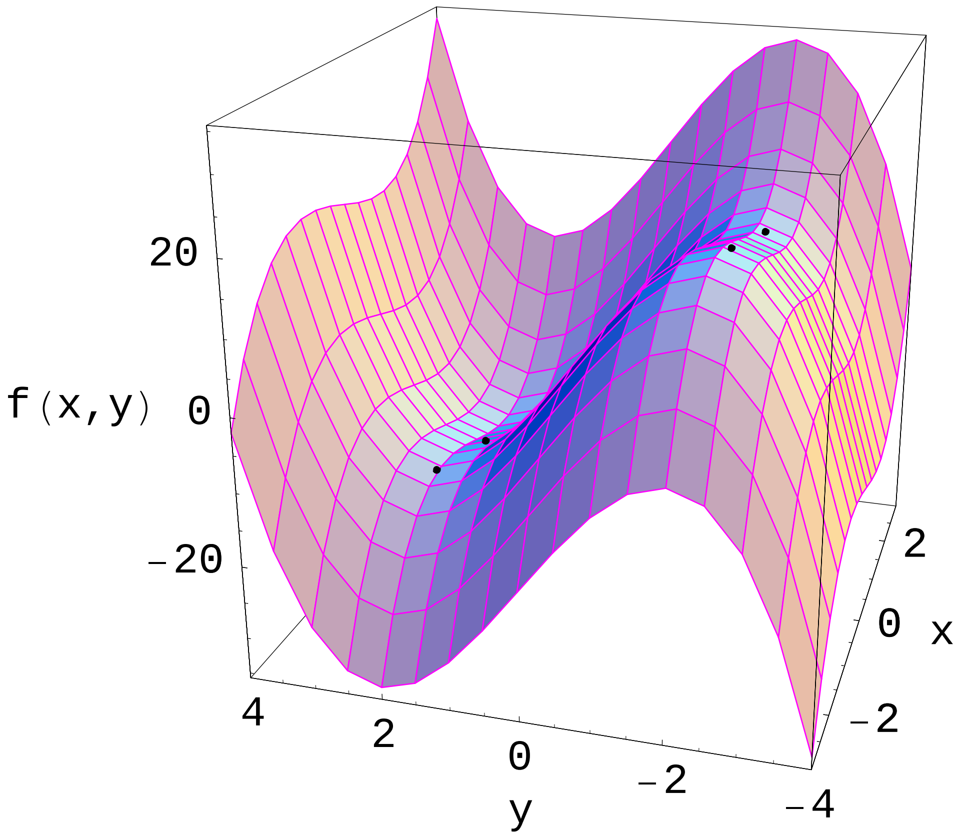


Abbildung 4.13: *Die Funktion* $z = x^3 - 3x + y^3 - 12y$

Mathematica 4.7.2

Preiselastizität von Produkt x_i

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial N_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{N_i}$$

und die

Kreuzpreiselastizitäten

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial N_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{N_i}, \; i \neq j.$$

Im Gegensatz zu den Preiselastizitäten sind Kreuzpreiselastizitäten meist positiv.

Produktionsfunktionen beschreiben die Produktion einer Produktionsanlage in Abhängigkeit von eingesetzten Faktoren:

$$f(r_1, \ldots, r_n).$$

Die partielle Ableitung $\dfrac{\partial f}{\partial r_i}$ heißt Grenzprodukt des i-ten Faktors. Aus ökonomischen Gründen gilt

1.
$$\frac{\partial f}{\partial r_i} \geq 0$$
und ab einem bestimmten Faktoreinsatz r_i^*

2.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial r_i^2} < 0$$
(Ertragsgesetz).

Eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion hat die Gestalt

$$f(r_1, \ldots, r_n) = c \cdot r_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot r_n^{\alpha_n},$$

mit positiven Konstanten $c, \ \alpha_1 \ \ldots, \alpha_n$. Sie hat günstige Eigenschaften:

1. f ist homogen vom Grad $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, d.h.
$$f(\lambda r_1, \ldots, \lambda r_n) = \lambda^\alpha f(r_1, \ldots, r_n);$$

2. die Grenzproduktivität des i-ten Faktors ist immer das α_i-fache seiner Durchschnittsproduktivität:
$$f_{r_i} = \alpha_i \frac{f}{r_i};$$

3. jede Faktorelastizität ist konstant:
$$\varepsilon_i = \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{r_i}{f} = \alpha_i.$$

Ist insbesondere $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, so gilt

$$f(\lambda r_1, \ldots, \lambda r_n) = \lambda f(r_1, \ldots, r_n),$$

d.h. wenn man den Einsatz aller Faktoren im gleichen Maße erhöht (z.B. um 10%), dann erhöht sich auch die Produktion im gleichen Maße (um 10%). Dies ist einerseits eine sehr plausible Eigenschaft, widerspricht aber andererseits dem Ertragsgesetz.

4.7.3 Aufgaben

Aufgabe 4.29 : Zeigen Sie, dass eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion die behaupteten Eigenschaften hat.

Aufgabe 4.30 : Ein Unternehmen produziert aus zwei substituierbaren Faktoren x und y ein Produkt. Die Produktionsfunktion ist

$$f(x, y) = 2x\sqrt{y},\ x, y \geq 0.$$

Die Kosten für den Faktoreinsatz berechnen sich nach der Kostenfunktion $K(x, y) = 20x + 5y$. Es sollen 64 Mengeneinheiten des Produktes hergestellt werden. Welche Mengen der Faktoren müssen eingesetzt werden, damit die Kosten minimal werden?

Wie groß sind im Kostenminimum die Grenzproduktivitäten der Faktoren? Die Durchschnittsproduktivitäten?

Kapitel 5

Lineare Algebra

5.1 Matrizen und Vektoren

Matrizen sind mit Tabellen eng verwandt. Tabellen sind ein wichtiges Hilfsmittel, um ökonomische Sachverhalte in kompakter Form auszudrücken.

Beispiel:

1. 2 Maschinen M_1 und M_2 stellen 3 Produkte P_1, P_2, P_3 her. Die Bearbeitungszeiten (in *ZE*, z.B. Std.) von Maschine M_i $(i = 1, 2)$ für eine Mengeneinheit (*ME*, z.B. Liter, Stück) von Produkt P_j $(j = 1, 2, 3)$ lassen sich in einer Tabelle darstellen.

	P_1	P_2	P_3
M_1	2	3	5
M_2	6	2	1

Dies ist eine Kurzform für:

Die Bearbeitungszeit von M_1 für eine ME von P_1 beträgt 2 ZE.
Die Bearbeitungszeit von M_1 für eine ME von P_2 beträgt 3 ZE.
$\vdots$ $\vdots$
Die Bearbeitungszeit von M_2 für eine ME von P_3 beträgt 1 ZE.

2. Ein Wirtschaftsgut soll von Absendeorten A_1, A_2, A_3 zu Empfangsorten E_1, E_2 transportiert werden. Die Kosten (in *GE*, z.B. DM) für den Transport einer ME des Gutes von A_i $(i = 1, 2, 3)$ nach E_j $(j = 1, 2)$ seien gegeben durch

	E_1	E_2
A_1	5	4
A_2	3	6
A_3	2	2

Dies ist eine Kurzform für:

> Die Transportkosten einer ME des Wirtschaftsgutes A_1 nach E_1 betragen 5 GE.
> Die Transportkosten einer ME des Wirtschaftsgutes A_1 nach E_2 betragen 4 GE.
> $\vdots \qquad\qquad \vdots$
> Die Transportkosten einer ME des Wirtschaftsgutes A_3 nach E_2 betragen 2 GE.

Definition 5.1.1 *1. Ein rechteckiges Zahlenschema (aus reellen Zahlen)*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt Matrix vom Typ $m \times n$.

Die $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *heißen* Elemente (Komponenten) *der Matrix.*
Senkrecht untereinander stehende Elemente der Matrix

$$\begin{array}{c} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{array}$$

heißen Spalte *und* j Spaltenindex.
Waagerecht nebeneinander stehende Elemente der Matrix

$$a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in}$$

heißen Zeile *und* i *heißt* Zeilenindex.

Andere Schreibweisen für A *sind:*

$$A = A_{(m,n)} = (a_{ij})_{(m,n)} = (a_{ij}),\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n.$$

m *= Zeilenzahl,* n *= Spaltenzahl.*

2. *Zwei Matrizen $A = (a_{ij})_{(m_1,n_1)}$ und $B = (b_{kl})_{(m_2,n_2)}$ heißen* gleich, *wenn sie vom selben* Typ *sind, d.h. $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, und wenn $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m_1$; $j = 1, \ldots, n_1$.*

Beispiel:

1. Matrix der Bearbeitungszeiten

$$2 \times 3 \text{ Matrix} \qquad \begin{array}{c|ccc} & P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline M_1 & 2 & 3 & 5 \\ M_2 & 6 & 2 & 1 \end{array}$$

2. Matrix der Transportkosten

$$3 \times 2 \text{ Matrix} \qquad \begin{array}{c|cc} & E_1 & E_2 \\ \hline A_1 & 5 & 4 \\ A_2 & 3 & 6 \\ A_3 & 2 & 2 \end{array}$$

Vektoren sind spezielle Matrizen:

Definition 5.1.2 1. *Eine $(m \times 1)$-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ heißt* Spaltenvektor.

2. *Eine $(1 \times n)$-Matrix $B = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n})$ heißt* Zeilenvektor.
In beiden Fällen ist die doppelte Indizierung überflüssig. Man schreibt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

für einen Spaltenvektor, und

$$\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$$

für einen Zeilenvektor.

Beispiel:

1. Die Bearbeitungszeiten der Maschinen M_1 und M_2 für eine ME des Produktes P_1 lassen sich als Spaltenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ schreiben.

2. Die von M_1 benötigten Arbeitszeiten für je eine ME von P_1, P_2, P_3 lassen sich als Zeilenvektor $\vec{b} = (2, 3, 5)$ schreiben.

Bemerkung:

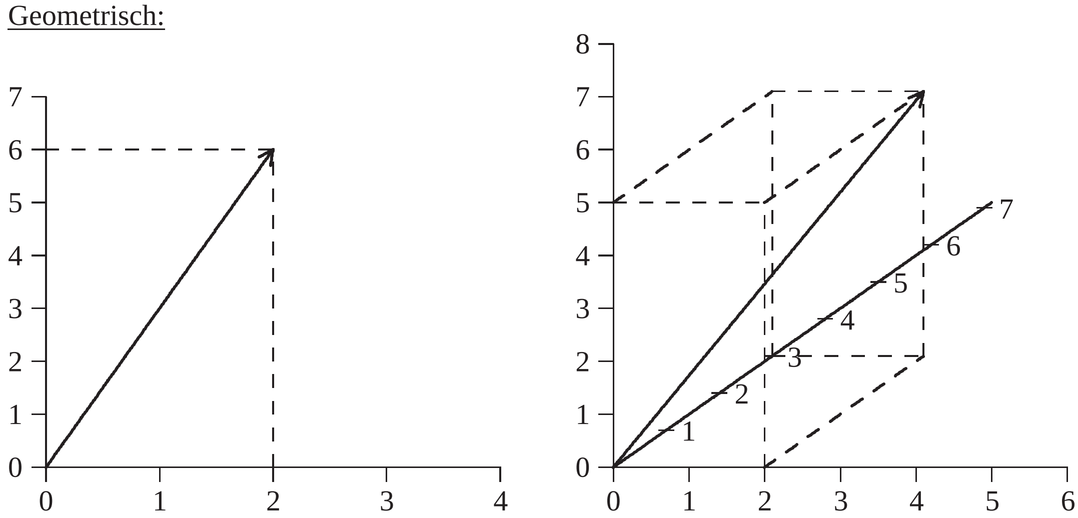
- Ein Zeilenvektor $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ ist ein Element des

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\mathrm{n-mal}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\}$$

- Ein Spaltenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ läßt sich auffassen als ein Element des $\mathbb{R}^m$, indem man $\vec{a}$ mit $(a_1, \dots, a_m)$ identifiziert.

  Häufig unterscheidet man nicht zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren und spricht einfach von einem Vektor.

<u>Geometrisch:</u>



$\vec{a} = (2, 6)$ $\qquad$ $\vec{b} = (2, 3, 5)$

Für Vektoren lassen sich eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen definieren.

Definition 5.1.3 *Seien $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Die Vektoraddition (Subtraktion) *ist definiert durch*

$$\vec{x} \pm \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) \pm (y_1, \dots, y_n) := (x_1 \pm y_1, \dots, x_n \pm y_n),$$

Die Skalarmultiplikation *mit dem* Skalar λ *durch*

$$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n).$$

Bemerkungen:

- Bei der Vektoraddition müssen sowohl $\vec{x}$ als auch $\vec{y}$ aus $\mathbb{R}^n$ sein.
- Die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation werden zurückgeführt auf die Operationen + und · in $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^n$ mit den Operationen + und · heißt Vektorraum.

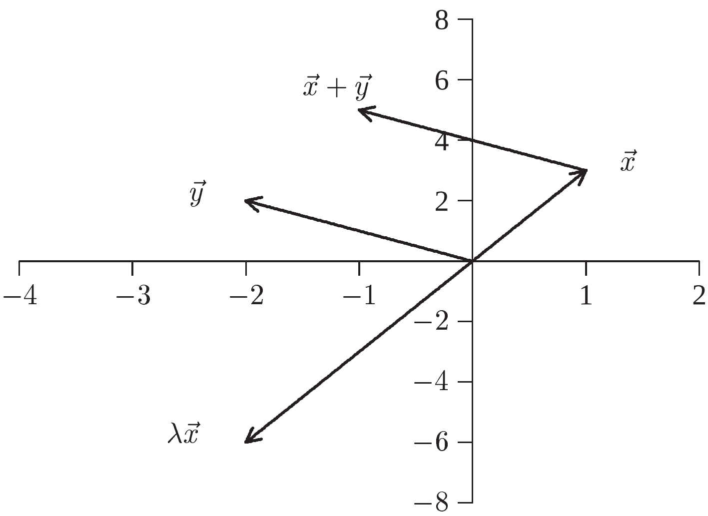
Beispiel:

1.

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= (2,3,4,2) \in \mathbb{R}^4,\ \lambda = 2;\\
\vec{y} &= (-1,1,-5,2) \in \mathbb{R}^4,\\
\vec{x}+\vec{y} &= (2-1,3+1,4-5,2+2) = (1,4,-1,4),\\
\vec{x}-\vec{y} &= (2-(-1),3-1,4-(-5),2-2) = (3,2,9,0),\\
\lambda\vec{x} &= 2(2,3,4,2) = (2\cdot 2,2\cdot 3,2\cdot 4,2\cdot 2) = (4,6,8,4).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= (1,3),\ \vec{y} = (-2,2),\ \lambda = -2;\\
\vec{x}+\vec{y} &= (1-2,3+2) = (-1,5),\\
\lambda\vec{x} &= (-2,-6).
\end{aligned}$$



$\vec{x}+\vec{y}$ ist der Vektor, der sich ergibt, wenn $\vec{y}$ durch Parallelverschiebung an die Spitze von $\vec{x}$ gesetzt wird.

$\lambda\vec{x}$ ist der Vektor der Länge $|\lambda|\cdot|\vec{x}|$ und der gleichen Richtung für $\lambda > 0$, und der entgegengesetzten für $\lambda < 0$. $|\vec{x}|$ bezeichnet dabei die Länge des Vektors $\vec{x}$.

Satz 5.1.4 *Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

a) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ *Kommutativgesetz*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{b)} & (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) \\ \text{c)} & (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) \end{array}\right\} \textit{Assoziativgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{d)} & (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x} \\ \text{e)} & \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y} \end{array}\right\} \textit{Distributivgesetze}$$

Beispiel: $\vec{x} = (1, 2),\ \vec{y} = (-1, 1),\ \vec{z} = (0, 2);\ \lambda = 5,\ \mu = 2.$

1. Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= [(1, 2) + (-1, 1)] + (0, 2) = (0, 3) + (0, 2) = (0, 5) \\ \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) &= (1, 2) + [(-1, 1) + (0, 2)] = (1, 2) + (-1, 3) = (0, 5) \end{aligned}$$

2. Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} &= 7 \cdot \vec{x} = (7, 14) \\ \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x} &= 5 \cdot (1, 2) + 2 \cdot (1, 2) = (5, 10) + (2, 4) = (7, 14) \end{aligned}$$

Für Beispiel 5.1 auf Seite 93 gilt:

$\vec{b}_1 = (2, 3, 5)$ gibt die Bearbeitungszeiten von M_1 für die Herstellung einer ME von $P_1,\ P_2,\ P_3$ an,
$\vec{b}_2 = (6, 2, 1)$ gibt die entsprechenden Bearbeitungszeiten von M_2 an.

Die insgesamt benötigten Bearbeitungszeiten von x_1 ME von P_1, x_2 ME von P_2, sowie x_3 ME von P_3 betragen:

$$\begin{array}{lll} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 & \text{für} & M_1, \\ 6x_1 + 2x_2 + 1x_3 & \text{für} & M_2. \end{array}$$

Dieses Ergebnis läßt sich schreiben als

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 6x_1 + 2x_2 + 1x_3 \end{pmatrix}$$

Definition 5.1.5

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{(m \times n)-\ \text{Matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\in \mathbb{R}^n \\ n = \text{ Anzahl der} \\ \text{Spalten}}} := \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\in \mathbb{R}^m \\ m = \text{ Anzahl der Zeilen}}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Summation} \\ \textit{über Spalten-} \\ \text{index}}}$$

<u>Beispiele:</u>

1. Transportkosten:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

x_1 = Anzahl von ME des Wirtschaftsgutes, die von jedem Absendeort $A_1,\ A_2,\ A_3$ nach E_1 transportiert werden.
x_2 = Anzahl von ME des Wirtschaftsgutes, die von jedem Absendeort $A_1,\ A_2,\ A_3$ nach E_2 transportiert werden.
i-te Komponente des Ergebnisvektors: Kosten für den Transport, die für den Absendeort A_i anfallen (A_2 muss für den Transport von x_1 ME nach E_1 und x_2 ME nach E_2 insgesamt $3x_1 + 6x_2$ GE bezahlen).

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{nicht definiert}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{nicht definiert}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

5.

$$(1\ 2\ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$$

Satz 5.1.6 *Sei A eine $(m \times n)$-Matrix, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt*

$$\begin{aligned} A(\vec{x}+\vec{y}) &= A\vec{x} + A\vec{y} \\ A(\lambda\vec{x}) &= \lambda(A\vec{x}) \end{aligned}$$

Die Eigenschaften aus Satz 5.1.6 werden unter der Bezeichnung Linearität zusammengefaßt.

<u>Beispiele:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda = 2$$

1.

$$\begin{aligned} A(\vec{x}+\vec{y}) &= A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A\vec{x} + A\vec{y} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A(\lambda\vec{x}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \lambda(A\vec{x}) &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Zuordnung $A\vec{x} = \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ läßt sich als Abbildungsvorschrift interpretieren:

Eine $(m \times n)$-Matrix definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt auch umgekehrt: jede lineare Abbildung ist durch eine Matrix beschreibbar.

Beispiele zu linearen Abbildungen:

1. Die Abbildung $\bar{A}:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (y,2x,y)$ soll mit einer Matrix A als $A:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ geschrieben werden.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ y \end{pmatrix}, \text{ also } A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{A}(x,y),$$
und A ist eine (3×2)-Matrix:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \bar{A}(1,0) = (0\ 2\ 0),$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \bar{A}(0,1) = (1\ 0\ 1);$$
$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{Probe: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Ist die Abbildung $\bar{A}:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (xy,y,x)$, linear?
Nein, ein Ansatz wie oben scheitert:
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$
aber
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ x \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y \\ x \end{pmatrix}.$$

Genauso wie für Abbildungen $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert man:

Definition 5.1.7 *Seien $A,\ B$ $(m \times n)$-Matrizen und $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. $(\lambda \cdot A)\vec{x} := \lambda(A \cdot \vec{x})$ *für* $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}$,
2. $-A := (-1) \cdot A$,
3. $(A \pm B)\vec{x} := A \cdot \vec{x} \pm B \cdot \vec{x}$.

Satz 5.1.8 *Seien $A = (a_{ij})_{(m,n)},\ B = (b_{ij})_{(m,n)}$ $(m \times n)$-Matrizen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt*

1.
$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{(m,n)}$$

2.

$$A \pm B = (a_{ij} + b_{ij})_{(m,n)}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ \lambda = -1, \\
\lambda A &= (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \\
A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+2 & 0+1 \\ 1+3 & 4+0 & 3+7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \\
A - B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-2 & 0-1 \\ 1-3 & 4-0 & 3-7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Auch die Hintereinanderschaltung (Verkettung) von Matrizen läßt sich definieren: Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine $(m \times n)$-Matrix und $B : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine $(n \times k)$-Matrix. Die Hintereinanderschaltung von A und B ist dann eine Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^m$:

$$A \circ B : \mathbb{R}^k \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$$

$A \circ B$ läßt sich wieder als eine $(m \times k)$-Matrix schreiben. Es gilt

Satz 5.1.9 *Seien $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ und $B = (b_{ij})_{(n,k)}$ Matrizen. Dann ist $A \circ B$ eine $(m \times k)$-Matrix $(c_{ij})_{(m,k)}$ mit*

$$c_{ij} = (a_{i1} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, k.$$

Man bezeichnet $A \circ B$ auch als Produkt (Multiplikation) von A und B und schreibt dafür $A \cdot B$.

Beispiele:

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{nicht definiert!}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 3 & 0\cdot 2 + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 2 + 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

d.h. im allgemeinen ist $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. es ist möglich, dass $A \neq 0$ und $B \neq 0$ ist und dennoch $A \cdot B = 0$.

Satz 5.1.10 *1. Seien A, B, C Matrizen gleichen Typs, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

a) $A + B = B + A$ *Kommutativgesetz*

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$
c) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$
$\Big\}$ *Assoziativgesetze*

d) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
e) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
$\Big\}$ *Distributivgesetze*

2. Seien A, B, C verträgliche Matrizen, d.h. nachfolgende Summen und Produkte seien definiert, so gilt

b) $(AB)C = A(BC)$
c) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
$\Big\}$ *Assoziativgesetze*

d) $A(B + C) = AB + AC$
e) $(A + B)C = AC + BC$
$\Big\}$ *Distributivgesetze*

Das Kommutativgesetz gilt für die Matrizenmultiplikation nicht!

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 47 & 30 \end{pmatrix} \\
A \cdot (B \cdot C) &= A \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 47 & 30 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5.1.1 Aufgaben

Aufgabe 5.1 : Seien $\vec{a} = (1,2),\ \vec{b} = (4,3)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie und ermitteln Sie graphisch:

$$\vec{a} + \vec{b},\ \vec{a} - \vec{b},\ 2\vec{a} - \vec{b}.$$

Aufgabe 5.2 : Sei $\vec{a} = (1,2,0)$ und $\vec{b} = (0,0,1)$. Bestimmen Sie $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ so, dass $2\vec{x} + \vec{a} = -3\vec{b}$.

Aufgabe 5.3 : Berechnen Sie für folgende Vektoren und Matrizen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $A\vec{x},\ B\vec{x},\ A\vec{x} - 2B\vec{x},\ (A - 2B)\vec{x},\ A(2\vec{x}) + A\vec{y},\ A(2\vec{x} + \vec{y})$

2. $A \cdot C,\ B \cdot C,\ A \cdot C + B \cdot C,\ (A + B) \cdot C$

Aufgabe 5.4 : Ein Produktionsprozess setze sich aus zwei Stufen zusammen:

1. Stufe: Rohstoffe R_i $(i = 1,2,3)$ werden zu Zwischenprodukten Z_j $(j = 1,2)$ verarbeitet.
2. Stufe: Aus den Zwischenprodukten Z_j werden Endprodukte P_k $(k = 1,2,3,4)$ gewonnen.

Die benötigten Mengeneinheiten (ME) von R_i zur Herstellung einer ME von Z_j, und die benötigten ME von Z_j zur Herstellung einer ME von P_k gehen aus den folgenden Tabellen hervor:

Stufe 1	Z_1	Z_2
R_1	2	4
R_2	6	5
R_3	3	2

Stufe 2	P_1	P_2	P_3	P_4
Z_1	4	2	3	5
Z_2	6	4	2	4

Ermitteln Sie die Matrix, die angibt, wieviele ME von R_i zur Herstellung einer ME von P_k benötigt werden.

Aufgabe 5.5 : In einem Produktionsprozess werden 3 Rohstoffe R_i zu 3 Endprodukten P_j verarbeitet. Die benötigten ME von R_i zur Herstellung einer ME von P_j seien durch folgende Tabelle gegeben:

	P_1	P_2	P_3
R_1	3	6	3
R_2	2	4	–
R_3	1	1	3

Welche Rohstoffmengen werden insgesamt benötigt, um 1 ME von P_1, 2 ME von P_2 und 3 ME von P_3 herzustellen?

Aufgabe 5.6 : Aus 2 Rohstoffen R_i $(i = 1,2)$ werden 2 Zwischenprodukte Z_j $(j = 1,2)$ hergestellt, und aus diesen Halbfertigprodukte H_k $(k = 1,2)$. Daraus werden schließlich die Endprodukte P_l $(l = 1,2)$ gefertigt. Der Materialverbrauch (in ME) pro ME der herzustellenden Zwischen-, Halbfertig- und Endprodukte sei durch folgende Tabellen gegeben:

Stufe 1	R_1	R_2
Z_1	2	1
Z_2	–	3

Stufe 2	Z_1	Z_2
H_1	–	2
H_2	4	3

Stufe 3	H_1	H_2
P_1	1	1
P_2	2	1

1. Welche Rohstoffmengen werden insgesamt benötigt, um 20 ME von P_1 und 30 ME von P_2 zu fertigen?
2. Welche Rohstoffmengen sind bereitzuhalten, wenn zusätzlich 2 ME von H_1 und 5 ME von H_2 als Lagerbestand produziert werden sollen?

5.2 Spezielle Matrizen

Definition 5.2.1 *Eine Matrix* $(a_{ij})_{(m,n)}$ *heißt* Nullmatrix, *geschrieben* 0, *falls* $a_{ij} = 0 \; \forall i, j$.

Es gilt $0 + A = A + 0$ für jede $(m \times n)$-Matrix A.

Bemerkung: Es gibt Matrizen $A, B \neq 0$ mit $A \cdot B = 0$, siehe Seite 103.

Definition 5.2.2 *Eine Matrix, deren Zeilen- und Spaltenzahl gleich sind, heißt* quadratische Matrix.

Definition 5.2.3 *Eine quadratische Matrix* $(a_{ij})_{(n,n)}$ *mit*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

heißt Einheitsmatrix, *geschrieben* E*:*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Für jede quadratische Ordnung gibt es eine eigene Einheitsmatrix, es werden aber meistens alle gleich bezeichnet.

Es gilt $E \cdot A = A$ bzw. $A \cdot E = A$ für jede verträgliche Matrix A.

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Definition 5.2.4 *Sei* A *eine quadratische Matrix. Eine Matrix* B *vom gleichen Typ mit*

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

heißt zu A inverse Matrix. *Man schreibt* $B = A^{-1}$. *Falls* A^{-1} *existiert, heißt* A regulär *oder* invertierbar, *sonst* singulär.

Bemerkung: Eine inverse Matrix ist nur für quadratische Matrizen definiert. Aber nicht alle quadratischen Matrizen sind regulär!

1. Die Nullmatrix 0 ist nicht regulär.

2. Sind $A, B \neq 0$ zwei Matrizen mit $A \cdot B = 0$, dann ist keine von beiden regulär:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= 0 \quad \Longrightarrow \\ A^{-1}(A \cdot B) &= A^{-1} \cdot 0 = 0, \\ (A^{-1} \cdot A)B &= E \cdot B = B \quad \Longrightarrow \\ B &= 0, \text{ Widerspruch .} \end{aligned}$$

3. Wird A als Abbildung aufgefasst, so ist A^{-1} die Umkehrabbildung:

$$(A \circ A^{-1})\vec{x} = E\vec{x} = \vec{x} \text{ für } \forall \vec{x}$$

4. $A\vec{x} = \vec{b}$ läßt sich als lineares Gleichungssystem mit Unbekannten x_i auffassen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

   A ist invertierbar $\Longrightarrow$ für jede rechte Seite $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gibt es eine Lösung des Gleichungssystems, nämlich $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

5. Die Inverse zu A ist eindeutig bestimmt, sofern sie existiert. Sei nämlich X neben A^{-1} eine zweite Matrix mit $X \cdot A = A \cdot X = E$, dann gilt

$$X = X \cdot E = X(A \cdot A^{-1}) = (X \cdot A)A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1}.$$

6. Es gilt offensichtlich $(A^{-1})^{-1} = A$.

5.2.1 Aufgaben

Aufgabe 5.7 : Seien A, B reguläre Matrizen gleichen Typs und $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie

1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$

Aufgabe 5.8 : Seien A und B reguläre Matrizen gleichen Typs. Zeigen Sie:

$$A \cdot B = B \cdot A \Longrightarrow A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Aufgabe 5.9 :

1. Schreiben Sie die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \hat{A} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2,\ \hat{A}(x, y, z) = (x, y + z) \\ \hat{B} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2,\ \hat{B}(x, y) = (y, 2x) \end{aligned}$$

   mit Matrizen A bzw. B, d.h. bestimmen Sie A und B so, dass

$$\hat{A}(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ und } \hat{B}(x, y) = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   gilt.
2. Zeigen Sie explizit

$$\hat{B} \circ \hat{A}(x, y, z) = B \cdot A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

5.3 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Definition 5.3.1 *Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ Vektoren vom gleichen Typ, und $\lambda_i, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.*

$$\vec{a} := \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$$

heißt eine Linearkombination *der Vektoren $\vec{a}_i$.*

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vom gleichen Typ heißen linear unabhängig, *wenn die Gleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \qquad (*)$$

nur durch $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ erfüllt wird. Läßt sich die Gleichung $(*)$ noch mit anderen Werten für die λ_i erfüllen, so heißen die Vektoren linear abhängig.

<u>Beispiel:</u> Seien $\vec{a}_1 = (2, 1),\ \vec{a}_2 = (1, 2),\ \vec{a}_3 = (-\frac{1}{2}, -1)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^2$. Dann gilt

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind linear abhängig

2. $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ sind linear unabhängig
3. $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ sind linear unabhängig
4. $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind linear abhängig

Zu 1.: $\lambda_1(2,1) + \lambda_2(1,2) + \lambda_3(-\frac{1}{2}, -1) = (0,0)$ läßt sich erfüllen mit $\lambda_3 = -1 \neq 0$:

$$\lambda_3 = -1 \Longrightarrow \vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2} = 0 & \quad & 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 1 = 0 & \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 1 = 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow 3\lambda_1 = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Zu 2.: $\lambda_1(2,1) + \lambda_2(1,2) = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \quad & 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow 3\lambda_1 = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$$

Definition 5.3.2 *Eine Menge von linear unabhängigen Vektoren* $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* Basis *des Vektorraums* $\mathbb{R}^n$.

Für sie gilt

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^n$$

Man sagt auch, die Basisvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ spannen *den Raum* $\mathbb{R}^n$ auf.

Die Standardbasis *des* $\mathbb{R}^n$ *besteht aus den* Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

Offenbar ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n,$$

die Einheitsvektoren spannen also den $\mathbb{R}^n$ auf, und sie sind auch linear unabhängig:

$$\sum \lambda_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Satz 5.3.3 1. *Jede Menge mit n linear unabhängigen Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^n$.*

2. *Jede Basis des $\mathbb{R}^n$ besteht aus genau n Basisvektoren.*

3. *Die Darstellung eines Vektors aus $\mathbb{R}^n$ als Linearkombination der Basisvektoren ist eindeutig.*

Daraus ergibt sich eine Aussage über die Lösungen von linearen Gleichungssystemen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \text{bedeutet} \qquad x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Da $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, gibt es *genau eine* Lösung für *jede* rechte Seite des Gleichungssystems. (Man deute die x_i als λ_i.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ x_2 + \ x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

läßt sich schreiben als

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daher gibt es für jedes $x_3 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung. Eine entsprechende Aussage gilt für x_2, nicht aber für x_1.

5.3.1 Aufgaben

Aufgabe 5.10 : Für welche Werte von x wird der Vektor $\vec{c} = (1, -2, x) \in \mathbb{R}^3$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = (3, 0, -2)$ und $\vec{b} = (2, -1, -5)$?

Aufgabe 5.11 : Seien $\vec{a}_1 = (2, 1)$ und $\vec{a}_2 = (1, 2)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^2$. Stellen Sie $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ dar.

Aufgabe 5.12 : Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{x} = (6, 2, -7), \ \vec{a} = (2, 1, -3), \ \vec{b} = (3, 2, -5), \ \vec{c} = (1, -1, 1)$$

1. Untersuchen Sie, ob $A = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ eine Basis ist.
2. Stellen Sie $\vec{x}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar.
3. Ist $(A \setminus \{\vec{a}\}) \cup \{\vec{x}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

5.4 Lineare Gleichungssysteme

Mit Hilfe von Matrizen lassen sich Gleichungssysteme kompakt aufschreiben.
Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Definition 5.4.1

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & + & & + \quad + & & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix}$$

bzw.

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ mit } A = (a_{ij})_{(m,n)},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

heißt lineares Gleichungssystem *mit m Gleichungen und n Variablen $x_1, \ldots, x_n$. A heißt die* Koeffizientenmatrix.
Sind alle $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, d.h. $\vec{b} = 0$, so heißt das System homogen, *andernfalls* inhomogen.

Satz 5.4.2 *Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ ändert sich nicht bei folgenden* elementaren Zeilenumformungen*:*

1. *Vertauschen zweier Zeilen*
2. *Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*
3. *Ersetzen einer Zeile durch die Summe oder Differenz aus* dieser *Zeile und einer* anderen *Zeile*

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 &= 18 \end{aligned}$$

hat die erweiterte Koeffizientenmatrix $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 20 \\ 3 & 1 & 18 \end{array}\right)$

Elementare Zeilenumformungen führen zur Lösung des Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 20 \\ 3 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2-3\cdot Z1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 20 \\ 0 & -14 & -42 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{14}Z2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 20 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z1-5\cdot Z2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Die resultierende erweiterte Koeffizientenmatrix steht für das Gleichungssystem

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = x_1 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = x_2 = 3$$

mit der offensichtlichen Lösung $x_1 = 5,\ x_2 = 3$.

Auf gleichem Wege kann man die Inverse einer Matrix bestimmen. Sei dazu A z.B. eine (3×3)-Matrix. Wenn man drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ kennt mit

$$A\vec{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1,\ A\vec{y} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_2,\ A\vec{z} = A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_3,$$

dann gilt

$$A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) := A \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Daraus ergibt sich das folgende Verfahren zur Bestimmung der Inversen einer Matrix A:

1. Löse die linearen Gleichungsysteme $A\vec{x} = \vec{e}_1,\ A\vec{y} = \vec{e}_2,\ A\vec{z} = \vec{e}_3$.
2. $A^{-1} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ gebildet aus den Lösungen als Spalten.

Dazu ist die Koeffizientenmatrix A wie folgt zu erweitern und durch Zeilenumformungen zu verändern:

$$\left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ A & 0 \\ & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & 1 \\ & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & 0 \\ & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & z_3 \end{array}\right)$$

Dies kann auch in einem Schritt geschehen:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ A & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & y_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_3 \end{array}\right)$$

Für andere Ordnungen der Matrix verfährt man entsprechend.

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2-3\cdot Z1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{14}Z2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z1-5\cdot Z2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ 0 & 1 & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{array}\right)$$

Also ist für $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Definition 5.4.3 *Die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilen (bzw. Spalten) einer Matrix A heißt* Zeilenrang *(bzw.* Spaltenrang*) von A und wird mit* rg A *bezeichnet.*

Bemerkung:

- Die Definition setzt offenbar voraus, dass Zeilenrang und Spaltenrang übereinstimmen. Das läßt sich tatsächlich beweisen.
- Eine $(n \times n)$-Matrix A ist invertierbar $\iff$ rg $A = n$

Satz 5.4.4 *Sei A eine $(m \times n)$-Matrix, und A_e die erweiterte Koeffizientenmatrix zum linearen Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$. Dann ist das Gleichungssystem*

1. *lösbar $\iff$ rg A = rg A_e,*
2. *eindeutig lösbar $\iff$ rg A = rg $A_e = n$ (Spaltenzahl),*

3. *eindeutig lösbar für beliebiges* $\vec{b} \in \mathbb{R}^m \iff$ *rg* $A = n = m$.

Satz 5.4.5 *Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems* $A\vec{x} = \vec{b}$ *läßt sich darstellen als Summe einer* speziellen *Lösung* $\vec{x}_0$ *des inhomogenen Systems, und einer allgemeinen Lösung* $\vec{y}$ *des homogenen Systems* $A\vec{x} = \vec{0}$*:*

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \\ -\frac{3}{2}x_1 & - & x_2 & = & -6 \end{array}$$

Geometrisch handelt es sich um zwei identische Geraden. Durch Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix erhält man

$$\left(\begin{array}{rr|r} 3 & 2 & 12 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & \frac{2}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist also $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Das homogene System endet nach Umformungen mit

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff 1 \cdot y_1 + \frac{2}{3} \cdot y_2 = 0$$

Wählt man y_2 als freien Parameter (y_1 wäre genauso geeignet), so ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\vec{y} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \, y_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Setzt man $\lambda = -y_2$, so erhält man eine Form, die sich direkt aus der erweiterten Koeffizientenmatrix ablesen läßt:

$$\vec{y} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \lambda \, \middle| \, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Damit ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Satz 5.4.6 *Sei* $A\vec{x} = \vec{b}$ *ein lineares Gleichungssystem und rg* $A = k, \ k \leq m, n$. *Dann gilt*

1. *A_e läßt sich durch elementare Zeilenumformungen und Vertauschungen von Spalten auf folgende Gestalt bringen:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & \cdots & 0 & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1,n} & b'_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{k,n} & b'_k \\ \hline & & & & & & b'_{k+1} \\ & 0 & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & & b'_m \end{array}\right)$$

2. *Das Gleichungssystem ist lösbar* $\iff b'_{k+1} = \ldots = b'_m = 0$.

3. *Die allgemeine Lösung lautet (bis auf Vertauschungen von Koordinaten wegen der vorgenommenen Spaltenvertauschungen)*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \\ x'_{k+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} a'_{1,k+1} \\ \vdots \\ a'_{k,k+1} \\ \left.\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} n-k \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} a'_{1,n} \\ \vdots \\ a'_{k,n} \\ \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{matrix}\right\} n-k \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 10 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 2 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2 \leftrightarrow Z1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3+Z1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3-Z2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{Z2-2\cdot Z4 \\ Z4\leftrightarrow Z2 \\ Z4\leftrightarrow Z3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{5}Z3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2-2\cdot Z3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1-Z2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{S2\leftrightarrow S3 \\ S4\leftrightarrow S3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus folgt wegen der Spaltenvertauschungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.4.1 Input-Output-Analyse

Ein Unternehmen produziert in n Sektoren, wobei jeder Sektor genau ein Gut herstellt. Die Sektoren beliefern sich aber auch gegenseitig, d.h. die Güter stellen auch

Faktoren für die Produktion dar. Es sei

$$\begin{aligned} x_i &= \text{die Gesamtproduktion von Sektor } i, \\ x_{ij} &= \text{die Lieferung von Sektor } i \text{ an Sektor } j, \\ y_i &= \text{die Lieferung von Sektor } i \text{ an den Verkauf }, \end{aligned}$$

wobei $1 \leq i, j \leq n$. Es gilt also

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + y_i.$$

Man nimmt an, dass die Input-Output-Koeffizienten $a_{ij} := \frac{x_{ij}}{x_j}$ konstant sind und die Produktionsprozesse charakterisieren. Es soll nun bei vorgegebenen Werten y_i für die verkauften Mengen bestimmt werden, wieviel die Sektoren insgesamt produzieren müssen, d.h. wie groß die x_i zu wählen sind. Mit den Abkürzungen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

erhält man die Gleichung

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}.$$

Diese kann man auflösen:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \vec{x} - A\vec{x} \\ &= E\vec{x} - A\vec{x} \\ &= (E - A)\vec{x} \\ &\text{also} \\ \vec{x} &= (E - A)^{-1}\vec{y}. \end{aligned}$$

5.4.2 Aufgaben

Aufgabe 5.13 : Lösen Sie folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 11 \\ 4x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.14 : Ermitteln Sie die inversen Matrizen von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 5.15 : Mit Maschinen M_1 und M_2 werden Produkte $P_1,\ P_2,\ P_3$ und P_4 hergestellt. Folgende Tabelle gibt die pro Woche verfügbaren Maschinenkapazitäten (in Minuten) sowie die benötigten Maschinenzeiten (in Minuten) zur Herstellung je einer Mengeneinheit (ME) der Produkte an:

	P_1	P_2	P_3	P_4	Kapazität
M_1	2	1	2	1	2400
M_2	1	3	5	2	4900

Die Summe der produzierten ME aller Produkte soll 1800 betragen. Die Produktionsmenge von P_1 soll die von P_3 um 200 übersteigen. Die Maschinenkapazitäten sollen voll ausgelastet werden.
Wieviele ME von P_i $(i = 1, \ldots, 4)$ müssen produziert werden?

Aufgabe 5.16 : Zeigen Sie

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar } \iff ad - bc \neq 0$$

Aufgabe 5.17 : Ermitteln Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.18 : Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme:

1. $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 3x_3 + 9x_4 &= 27 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.19 : Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

1. Finden Sie alle Lösungen.
2. Welche lineare(n) Abhängigkeit(en) bestehen zwischen den Spaltenvektoren der dem Gleichungssystem zugeordneten Matrix?
3. Welche Lösungen hat das Gleichungssystem, wenn die 8 rechts unten durch 7 ersetzt wird?

Aufgabe 5.20 : Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= c - 1 \\ 2x_1 - \frac{c}{5}x_2 + 3x_3 &= c + 8 \\ x_2 + 2x_3 &= c + 6 \end{aligned}$$

1. Welche Bedingung muss für c gelten, damit das Gleichungssystem genau eine bzw. keine Lösung besitzt?
2. Kann das Gleichungssystem mehr als eine Lösung besitzen?
3. Bestimmen Sie die Lösung für c=5.

Aufgabe 5.21 : Die Produktionskosten K für ein Produkt hängen von der produzierten Menge x in Form eines Polynoms dritten Grades ab,

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Bestimmen Sie die Funktion, d.h. $a,\ b,\ c$ und d, wenn folgendes bekannt ist:

- Die Fixkosten betragen 13 000 €,
- die Grenzkosten sind für $x = 400$ minimal,
- sie betragen dort 50 €/Stück, und
- die variablen Kosten sind dann 36 000 €.

Aufgabe 5.22 : Zeigen Sie, dass bei der Input-Output-Analyse das entstehende Gleichungssystem stets lösbar ist, wenn man die vernünftige Annahme macht, dass alle $y_i \geq 0$ sind.

Aufgabe 5.23 : Ein Unternehmen hat drei Produktionssektoren. Jeder Sektor benötigt zur Produktion einer Mengeneinheit (1 ME) seines Produktes eine gewisse Anzahl von Mengeneinheiten der Produkte der anderen Sektoren (er verbraucht auch seine eigenen Produkte für seine Produktion) nach der folgenden Tabelle:

Powerpoint 34

je ME benötigt von Sektor	Verbrauch aus Sektor (ME) 1	2	3
1	0.3	0.1	0.1
2	0.1	0.2	0.2
3	0.2	0	0.6

Es sollen in den Sektoren folgende Produktmengen verkauft werden: 10 ME in Sektor 1, 20 ME in Sektor 2 und 40 ME in Sektor 3. Welche Mengen müssen die Sektoren produzieren?

Anhang A

Lösungen zu ausgewählten Aufgaben

1.1 $-\frac{1}{6}, \quad -2, \quad \frac{5}{2} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{1}{2\cdot 3^k}.$

1.2 $4^{n-2} - 4^{m-1}, \quad 4.$

1.3 a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} 2(i+1)^2,$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n},$

c) $\displaystyle\sum_{m=-1}^{4} a^{2m+11}.$

1.4 $4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$

1.5 $a^2 - 2ab + b^2,\ a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

1.6 Hinweis: Betrachten Sie $(1+1)^n$.

1.7 220.

1.8 $\frac{1}{n(n-2)!}$

1.9 5005, 1 000 000.

1.11 1, 4, 10, 1.

1.12 $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, $2^{16} \cdot 2543$.

1.13 1, 40, 11.

1.15 4, 8, 6.

1.16 $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$.

1.21 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

1.23 b), d) unbeschränkt, c) beschränkt, a), e) infinitesimal, f) $\in \mathbb{R}$

1.24 a) 0, b) $\frac{1}{5}$, c) 4, e) 0, f) 1

2.1 a) Grenzwert ist 1
b) Grenzwert ist -1
c) Grenzwert ist $0.371\,928\,322\,5\ldots$
d) Es gibt zwei Häufungspunkte bei $0.479\,427\,019\,8\ldots$ und bei $0.823\,603\,283\,2\ldots$

2.2 3, 1, 1.

2.3 $\sqrt[3]{e}$.

2.4 $\frac{1}{10}$.

2.5 2.

2.6 $\frac{125}{4}$.

2.7 $\frac{29}{990}, \quad \frac{2}{99}, \quad \frac{2401}{9900}, \quad \frac{41}{333}$.

3.1 $[-3, 3], \quad \mathbb{R} \setminus (-3, 3), \quad (1, \infty), \quad (1, 4), \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^+$.

3.2 a) nicht injektiv ,
b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-4}$,
c) nicht injektiv ,
d) $f^{-1}(x) = -\sqrt{(x-1)^2 - 4}$,
e) $f^{-1}(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 4}$,
f) $f^{-1}(x) = \frac{1}{12}(\sqrt{24e^x - 1} + 1)$.

3.3 $a = b = 1$.

3.5 hebbare Unstetigkeit mit Wert 1/2

3.6 $\infty, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{m}{n}$.

3.7 stetig; $a = -\frac{7}{4}$.

3.8 $(x-1)(x+5), \quad 3x(x-5)(x-3), \quad x(x-4)(x-2)(x+1)(x+3)$,
$(x-2)(x+2)(3x^2+1), \quad (x-1)(x+1)(x^6+x^4+x^2+1)$.
Warum hat der letzte Faktor von e) keine Nullstellen?

3.9 $[-\frac{35}{12}, \frac{35}{12}]$, ja.

		$D(f)$	Pole	Nullst.	hebb. Unstet.	Asymptote
3.10	a)	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{5},2\}$	$\frac{1}{5}$	$1,3$	$f(2)=-\frac{1}{9}$	$\frac{x}{5}-\frac{19}{25}$
	b)	$\mathbb{R}\setminus\{-2,\frac{1}{2}\}$	$\frac{1}{2}$	$0,2$	$f(-2)=-\frac{104}{5}$	$\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2-\frac{5}{8}x-\frac{21}{16}$
	c)	$\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$	*keine*	*keine*	$f(2)=f(-2)=\frac{1}{5}$	0

3.11 $\frac{\ln x}{\ln 2} = 1.442695 \ln x$, $\frac{\lg x}{\lg 2} = 3.321928 \ln x$.

3.12 2.

3.13 1.

3.14 $\frac{\ln 2}{\ln(1+p/100)}$

3.17 $m,\ m,\ m$ bzw. $1,\ m-1+\frac{m}{2^m-1},\ m.$

3.18 6 Ct.

4.1 $-\frac{x+1}{(x+3)^3}$, $\quad 6\cdot\frac{x^4-2x^3+8x^2+10x-10}{(3x^2-3x+5)^2}$, $\quad \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}$,
$e^{\frac{x}{2}}(\frac{x^2}{2}+2x)+e^{2x}(x+\frac{1}{2})-e^{-2x+3}(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})$, $\quad e^x(\ln x+\frac{1}{x})$, $\quad -\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^{\frac{3}{2}}}$,
$-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$, $\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\quad \sqrt[x]{x}\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$.

4.3 a) $\frac{2}{x}$, $\quad -\frac{2}{x^2}$, $\quad \frac{4}{x^3}$,
b) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $\quad -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, $\quad \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$,
c) $e^x(x+1)$, $\quad e^x(x+2)$, $\quad e^x(x+3)$.

4.5 a) Nullstellen $1,2$; $\frac{9}{5}$ Minimum, 1 Maximum ,
b) Nullstellen $1,\frac{1}{9}$; $\frac{7}{9}$ Minimum, $-\frac{1}{3}$ Maximum .

4.6 Nullstellen $2,3,-3$, Minimum $\frac{1}{3}(2+\sqrt{31})$, Maximum $\frac{1}{3}(2-\sqrt{31})$, Wendepunkt $\frac{2}{3}$.

4.7 Extremstelle.

4.8 $d=0,\ a<0,\ b>0,\ c\geq 0.$

4.9 a) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$, Nullstelle bei $-\frac{2}{3}$, Polstelle bei -4, $r(x)\equiv 3$, keine Extrem- oder Wendepunkte, überall wachsend, konkav bis -4, danach konvex.
b) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$, Nullstelle bei $-\frac{2}{3}$, Polstelle bei -4, $r(x)\equiv 0$, Maximum bei $\frac{8}{3}$, Wendepunkt bei 6, wachsend auf $(-4,\frac{8}{3}]$, sonst fallend, konvex auf $[6,\infty)$, sonst konkav.
c) $D(f)=(-1,\infty)$, keine Nullstelle (!), Minimum bei $-\frac{1}{2}$, Wendepunkt bei $\frac{1}{2}$, links vom Minimum fallend, sonst wachsend, links vom Wendepunkt konvex, sonst konkav.

4.11 $f(x)=\frac{6x}{3+x}$

4.13 1. symmetrisch um die y-Achse, 2. Maximum bei $x = 0$, Wendepunkte bei $x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$, 3. geht gegen Null, 4. nur ein Minimum bei $x = 0$, geht gegen ∞, 5. alle Funktionswerte werden mit e^C multipliziert, sonst alles wie vorher, 6. $e^{-\frac{(x-1)^2}{a}}$.

4.14 1. nur für $a < 0$ hat er Polstellen, nur für $a > 0$ hat er Wendepunkte, 2. Extremstelle bei $x = 0$, ist Minimum für $a < 0$, Maximum für $a > 0$, Wendepunkte bei $x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$, 3. geht gegen Null.

4.15 $h = 7.5$ cm, $b = 30$ cm.

4.16 $h = 1, b = 2$ oder $h = 2, b = 1$.[1]

4.18 1.) $\frac{16-3p_0}{8-p_0}$ 2.) -1% 3.) elastisch für $p \in (0,4) \cup (6,8)$, unelastisch für $p \in (4,6)$

4.20 $x_0 = 1.0799$.

4.23 2, 2, $\frac{m}{n}$, 4, 1, $-\ln 2$.

4.24 5, 29, 27, 9, 1.

4.25 $T_2(x) = 1 + \frac{1}{5}(x-1) - \frac{2}{25}(x-1)^2$,
$1.12689 \leq \sqrt[5]{2} \leq 1.168$.

4.27 $e^{-(x^2+y^2)}(y - 2yx^2)$, $\quad e^{-(x^2+y^2)}(x - 2xy^2)$,
$e^{-(x^2+y^2)}(4x^3y - 6xy)$, $\quad e^{-(x^2+y^2)}(4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1)$,
$e^{-(x^2+y^2)}(4xy^3 - 6xy)$,
Maxima bei $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, Minima bei $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, Sattelpunkt bei $(0,0)$.

4.28 relatives Minimum bei $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, Sattelpunkt bei $(0,0)$.

4.30 8 ME von x, 16 ME von y; 8, 2; 8, 4.

5.5 24, 10, 12

5.6 1.) 400, 1130 2.) zusätzlich 40, 77

5.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

5.10 x=-8

5.12 1.) ja 2.) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 3.) ja

[1] Es gibt noch eine dritte Lösung, nämlich das Rechteck, dass von der Tangente an die Kurve in $x = 1$, der Strecke zwischen den Punkten (1,0) und (0,2) und den Loten von diesen Punkten auf die Tangente begrenzt wird.

5.13 $x_1 = 1,\ x_2 = 2$

5.14 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{3} \end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -10 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

5.15 400, 100, 200, 100

5.17 rg $A = 2$

5.18 1.) $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

2.) $\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

5.19 1.) $\begin{pmatrix} \frac{21}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ -1 \end{pmatrix}$
2.) $4\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 + 7\vec{a}_3 = 0$
3.) keine

5.20 1.) $2c + 65 \neq 0 \iff$ genau eine Lösung, $2c + 65 = 0 \iff$ keine Lösung
2.) nein 3.) $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$

5.21 $K(x) = 0.00025x^3 - 0.3x^2 + 170x + 13000.$

5.23 56 in Sektor 1, 32 in Sektor 2 und 130 in Sektor 3.