

Mathematik für Wirtschaftsinformatiker

Übungen mit Lösungen

Universität Lüneburg

Fachbereich Wirtschaft

Prof. Dr. rer. nat. Ulrich Hoffmann

Oktober 2005

Die folgenden Übungsaufgaben erfordern gelegentlich einige eigene Gedanken. Bitte lassen Sie sich nicht entmutigen, wenn Sie nicht immer sofort auf die Lösung kommen. Bitte versuchen Sie, die Aufgaben selbständig zu lösen. Zu fast allen Übungsaufgaben werden **Lösungen** bereitgestellt. Die Übungsaufgaben sind nach den einzelnen Kapiteln der Vorlesung gruppiert. Weitere Übungsaufgaben finden sich in der angegebenen Literatur.

Die Übungsaufgaben sind gemäß ihrem **Schwierigkeitsgrad** durch Sterne an den Aufgabennummern mit folgender Bedeutung klassifiziert:

ohne Sterne	Die Aufgabe sollte selbständig gelöst werden, nachdem der entsprechende Stoff in der Vorlesung behandelt wurde und ohne die Musterlösung zu Hilfe zu nehmen.
ein Stern [*]	Die Aufgabe ist etwas schwieriger und erfordert eventuell einige eigene Überlegungen. Sie sollte jedoch trotzdem selbständig gelöst werden, ohne die Musterlösung zu Hilfe zu nehmen. Eventuell hilft auch ein intensiverer Blick in das Vorlesungsskript oder die Fachliteratur.
zwei Sterne [**]	Sie sollten sich zunächst ohne Zuhilfenahme der Musterlösung an der Aufgabe versuchen, auch wenn sie Ihnen als schwierig erscheint.

Hinweis:

Die folgenden Übungsaufgaben sind teilweise der angegebenen Literatur entnommen.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Übungen zu 1: Grundlegende Definitionen und Bezeichnungen	5
Übungen zu 2: Abbildungen	10
Übungen zu 3: Ausgewählte Themen der elementaren Zahlentheorie	12
Übungen zu 4: Ausgewählte Themen der Kombinatorik	16
Übungen zu 5: Ausgewählte Themen der Analysis	19
Übungen zu 6: Ausgewählte Themen der Linearen Algebra	31
Lösungen der Übungsaufgaben	35

1 Grundlegende Definitionen und Bezeichnungen

Aufgabe 1.1: (ohne Lösungen)

Beweisen Sie die in der Vorlesung nicht bewiesenen Aussagen aus Satz 1.1-1.

Aufgabe 1.2: (ohne Lösungen)

Stellen Sie die Wahrheitstabellen für die Tautologien in Satz 1.2-1 auf.

Aufgabe 1.3:

Es seien P , Q und R Aussagen. Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

(a) $((P \wedge (Q \Rightarrow R)) \vee (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q)).$

(b) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R).$

(c) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \vee (\neg(P \vee Q) \Rightarrow R).$

(d) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P).$

(e) $((P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)).$

Aufgabe 1.4:

Zeigen Sie:

Durch die Festlegung

„ $n \triangleleft m$ genau dann, wenn n die Zahl m ohne Rest teilt“

wird eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiert. Ist diese Relation eine totale Ordnungsrelation?

Aufgabe 1.5 [*]:

Es sei $M = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Zeigen Sie:

Durch die Festlegung

„ $(n, m) \approx (k, l)$ genau dann, wenn $n + l = m + k$ gilt“

wird eine Äquivalenzrelation auf M definiert. Geben Sie ein $x \in [(3, 5)]_{\approx}$ mit $x \neq (3, 5)$, $y \in [(5, 3)]_{\approx}$ mit $y \neq (5, 3)$ und $z \in [(3, 3)]_{\approx}$ mit $z \neq (3, 3)$ an. Beschreiben Sie $[(3, 5)]_{\approx}$, $[(5, 3)]_{\approx}$ und $[(3, 3)]_{\approx}$.

Aufgabe 1.6:

Es sei $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge M , und es seien $a \in M$ und $b \in M$. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $a \approx b$ genau dann, wenn $[a]_{\approx} = [b]_{\approx}$ ist.
- (b) Für jedes $a \in M$ und jedes $b \in M$ ist entweder $[a]_{\approx} = [b]_{\approx}$ oder $[a]_{\approx} \cap [b]_{\approx} = \emptyset$.
- (c) $\bigcup_{a \in M} [a]_{\approx} = M$
(auf der linken Seite des Gleichheitszeichens steht die Vereinigung aller Äquivalenzklassen, die man mit Elementen aus M bilden kann).

Aufgabe 1.7:

Das DIN-A-Format hat die Eigenschaft, dass das Verhältnis

(Länge der längeren Seite eines Blatts) zu (Länge der kürzeren Seite eines Blatts)

auch dann erhalten bleibt, wenn man das Blatt in der Mitte der längeren Seite zusammenfaltet. Außerdem sind beide Seiten unterschiedlich lang. Wie lautet dieses Verhältnis? Das DIN-A-0-Format ist dadurch definiert, dass ein Blatt eine Fläche von 1 m^2 besitzt. Wird ein Blatt im DIN-A-0-Format i -mal jeweils an der längeren Seite in der Mitte gefaltet, so erhält man ein

Blatt im DIN-A-i-Format. Welche Seitenlängen haben die längere und die kürzere Seite eines Blatts im DIN-A-4-Format?

Aufgabe 1.8:

Die folgenden Teilaufgaben sind jeweils durch vollständige Induktion zu beweisen.

(a) Zeigen Sie: $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}.$

(b) Zeigen Sie: $\sum_{i=0}^n (2 \cdot i + 1) = (n+1)^2.$

(c) Zeigen Sie: $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1.$

(d) Zeigen Sie: Für jedes $n \geq 6$ ist $4 \cdot n < n^2 - 7.$

(e) [*] Zeigen Sie: Die Summe $\sum_{i=0}^n i^3$ ist eine Quadratzahl.

(f) [**] Eine Aussage gilt „für fast alle $n \in \mathbf{N}$ “, wenn sie für alle $n \in \mathbf{N}$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen gilt, d.h. wenn es ein $n_0 \in \mathbf{N}$ gibt, so dass die Aussage für alle $n \geq n_0$ gilt. Zeigen Sie:

Für fast alle $n \in \mathbf{N}$ ist $2^n > n^2.$

Für fast alle $n \in \mathbf{N}$ ist $2^n > n^3.$

Für fast alle $n \in \mathbf{N}$ ist $2^n > n^4.$

Es sei $k \in \mathbf{N}$ eine feste natürliche Zahl mit $k \geq 1$. Dann gilt $2^n > n^k$ für fast alle $n \in \mathbf{N}$. Hinweis: Multipliziert man $(n+1)^m$ aus, so erhält man (das wird in späteren Kapiteln

gezeigt) $(n+1)^m = n^m + a_1 \cdot n^{m-1} + a_2 \cdot n^{m-2} + \dots + a_m$ mit $\sum_{i=1}^m a_i = 2^m - 1.$

(g) Es sei $n \in \mathbf{N}$ eine 2-er-Potenz, d.h. $n = 2^k$ mit $k \in \mathbf{N}$. Es gelte

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1 \\ 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n - 1 & \text{für } n \geq 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbf{N}$ der Form $n = 2^k$ mit $k \in \mathbf{N}$ ist

$$T(n) = T(2^k) = (k-1) \cdot n + 1.$$

Aufgabe 1.9:

Ergänzen Sie in den folgenden Gleichungen die durch ? markierten Stellen:

$$(a) \quad \sum_{i=1}^5 2 \cdot i^2 = \sum_{k=0}^? ?.$$

$$(b) \quad \sum_{i=-2}^3 \frac{1}{i+3} = \sum_{n=?}^? \frac{1}{n}.$$

$$(c) \quad \sum_{m=?}^4 a^{2m+?} = \sum_{n=1}^6 a^{2n+7}.$$

Aufgabe 1.10:

Vereinfachen Sie die folgenden Summen, soweit es geht:

$$(a) \quad \sum_{i=n}^m 2^{2i-4} - \sum_{i=n-2}^{m-2} 4^{i+1}.$$

$$(b) \quad \sum_{m=1}^4 \frac{m}{m+1} + \sum_{m=2}^5 \frac{1}{m}.$$

Aufgabe 1.11:

Berechnen Sie $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+3) \cdot (i+5)}$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 1.12 [*]:

Die endliche Summe $\sum_{i=0}^{100} x^i$ wird quadriert, d.h. es wird $\left(\sum_{i=0}^{100} x^i\right)^2$ gebildet, und dann in die Form $\sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$ gebracht. Bestimmen Sie n und a_{50} .

2 Abbildungen

Aufgabe 2.1:

Beweisen Sie Satz 2.2-2 (i) und (ii).

Aufgabe 2.2:

Gegeben seien die beiden Abbildungen

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{1/2\} & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \rightarrow \frac{3 \cdot x + 4}{2 \cdot x - 1} \end{cases} \quad \text{und} \quad g : \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{3/2\} & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \rightarrow \frac{x - 5}{2 \cdot x - 3} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(b) Zeigen Sie: $f(\mathbf{R} \setminus \{1/2\}) = \mathbf{R} \setminus \{3/2\}$.

(c) Wie lautet die Umkehrfunktion zu $f^* : \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{1/2\} & \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{3/2\} \\ x & \rightarrow \frac{3 \cdot x + 4}{2 \cdot x - 1} \end{cases} ?$

(d) Berechnen Sie die Funktionsvorschrift von $g \circ f : \mathbf{R} \setminus \{1/2\} \rightarrow \mathbf{R}$.

Aufgabe 2.3:

Sind die folgenden beiden Abbildungen surjektiv bzw. injektiv?

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ (x, y, z) & \rightarrow (x + y, y + z) \end{cases},$$

$$g : \begin{cases} \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ (x, y) & \rightarrow (x, x + y, y) \end{cases}.$$

Aufgabe 2.4 [*]:

Es seien A und B Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Beschreiben die folgenden beiden Vorschriften wirklich Abbildungen zwischen den Potenzmengen von A bzw. B ?

$$F : \begin{cases} \mathbf{P}(A) & \rightarrow \mathbf{P}(B) \\ U & \rightarrow f(U) \end{cases} \quad G : \begin{cases} \mathbf{P}(B) & \rightarrow \mathbf{P}(A) \\ V & \rightarrow f^{-1}(V) \end{cases}.$$

Hierbei ist $f^{-1}(V) = \bigcup_{v \in V} f^{-1}(v)$.

Verifizieren Sie mit einem einfachen Beispiel für f , A und B , dass F und G nicht zueinander invers sind.

Aufgabe 2.5 []:**

- (a) Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.
- (b) Die Mächtigkeit einer unendlich abzählbaren Menge ändert sich nicht, wenn man endlich viele Elemente entfernt.
- (c) Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

Aufgabe 2.6:

Es seien A und B Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Durch

„ $a \sim_f b$ genau dann, wenn $f(a) = f(b)$ gilt“

wird auf A eine Äquivalenzrelation definiert. Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen von $\sim_f$, wenn f injektiv ist.

3 Ausgewählte Themen der elementaren Zahlentheorie

Aufgabe 3.1:

Es sei $p > 3$ eine Primzahl.

- (a) Zeigen Sie: Die Zahl 6 ist ein Teiler von $p-1$ oder von $p-5$, d.h. $p \equiv 1 \pmod{6}$ oder $p \equiv 5 \pmod{6}$.
- (b) Zeigen Sie: Ist von 6 aufeinanderfolgenden Zahlen die kleinste größer als 3, so sind höchstens zwei dieser Zahlen Primzahlen.

Aufgabe 3.2 [*]:

Gegeben seien 30 aufeinanderfolgende Zahlen, deren kleinste ≥ 31 ist. Zeigen Sie: Unter diesen Zahlen sind mindestens 5 aufeinanderfolgende zusammengesetzte Zahlen. Wieviele Primzahlen sind unter diesen 30 Zahlen höchstens?

Aufgabe 3.3:

Berechnen Sie $12121212 \bmod 11$ und $12345678 \bmod 250$.

Aufgabe 3.4:

Zeigen Sie:

- (a) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt entweder $a^2 \bmod 4 = 1$ oder $a^2 \bmod 4 = 0$.
- (b) Keine der Zahlen (in Dezimalschreibweise) 11, 111, 1111, 11111, ... ist ein Quadrat.

Hinweis: Führen Sie die Annahme, die angegebenen Zahlen seien Quadrate mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe (a) auf einen Widerspruch.

- (c) [*] Keine der Zahlen (in Dezimalschreibweise) 101, 10101, 1010101, 101010101, ... ist ein Quadrat.

Aufgabe 3.5 [*]:

Zeigen Sie: Es gibt kein $a \in \mathbf{Z}$ mit $a^2 \bmod 100 = 45$.

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst die Fälle, dass a einstellig oder zweistellig ist, und dann erst den allgemeinen Fall.

Aufgabe 3.6:

Für welche $n \in \mathbf{N}$ ist $n+1$ ein Teiler von n^2+1 ?

Aufgabe 3.7:

Zeigen Sie:

- (a) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbf{N}$ mit $4 \cdot n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$.
- (b) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbf{N}$ mit $4 \cdot n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$.
- (c) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbf{N}$ mit $4 \cdot n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{17}$.

Aufgabe 3.8:

- (a) Bestimmen Sie ganze Zahlen a und b mit $a \cdot 28 + b \cdot 15 = \text{ggT}(28, 15)$.
- (b) Bestimmen Sie ganze Zahlen a und b mit $a \cdot 198 + b \cdot 84 = \text{ggT}(198, 84)$.

Aufgabe 3.9:

- (a) Berechnen Sie für jedes $a \in \mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ die Werte $a^i \bmod 13$, jeweils für $i = 1, \dots, 12$. Berechnen Sie die Werte dabei durch sukzessive $(i-1)$ -fache Multiplikation, wobei Sie nach jedem Multiplikationsschritt modulo 13 reduzieren. Beispielsweise wird nicht erst

$2^{12} = 4096$ berechnet und dann modulo 13 reduziert, sondern es wird $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{12\text{-mal}}$ berechnet und nach jeder einzelnen Multiplikation der Rest modulo 13 bestimmt und mit diesem Rest weitergerechnet.

- (b) Berechnen Sie wie in Aufgabe (a) für jedes $a \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ die Werte $a^i \bmod 12$, jeweils für $i = 1, \dots, 14$.

Aufgabe 3.10 [**]:

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\text{ggT}(2^n + 1, 9)$, $\text{ggT}(2^n + 1, 27)$ und $\text{ggT}(2^n + 1, 3^m)$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $\text{ggT}(2^n + 1, 9)$ und $\text{ggT}(2^n + 1, 27)$, indem Sie einige Werte für n ausprobieren. Versuchen Sie dann auf den allgemeinen Fall $\text{ggT}(2^n + 1, 3^m)$ zu schließen ([**]).

Aufgabe 3.11:

- (a) Bestimmen Sie alle invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$, d.h. alle $a \in \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$, für die es ein $b \in \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ gibt mit $a \cdot b \equiv 1 \pmod{21}$.
- (b) Lösen Sie die Gleichung $7 \cdot x + 14 = 3$ in $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3.12:

Berechnen Sie $\phi(10^n)$.

Aufgabe 3.13:

- (a) Es sei p eine ungerade Primzahl und $a \in \mathbb{N}$. Warum ist $2 \cdot p$ ein Teiler von $a^p - a$?
- (b) Warum haben im Dezimalsystem für alle Zahlen $a \in \mathbb{N}$ die Werte a und a^5 dieselbe Endziffer?

Aufgabe 3.14:

Mit Hilfe von Satz 3.4-3 (i) kann man häufig große Potenzreste einfach berechnen. Beispielsweise ist $6^{52} \equiv 6^{50} \cdot 6^2 \equiv (6^{10})^5 \cdot 6^2 \equiv 1^5 \cdot 6^2 \equiv 36 \pmod{11}$. Berechnen Sie nach diesem Schema unter Anwendung von Satz 3.4-3 (i) die Werte

- (a) $20^{350} \pmod{7}$
- (b) $3^{82} \pmod{17}$
- (c) $2^{17} \pmod{19}$
- (d) [*] $2^{p-2} \pmod{p}$ mit einer Primzahl $p \geq 3$
- (e) $(2^{70} + 3^{70}) \pmod{13}$.

Aufgabe 3.15:

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 3.4-3:

- (a) Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist 42 ein Teiler von $n^7 - n$.
- (b) Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist $\frac{1}{5} \cdot n^5 + \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{7}{15} \cdot n$ eine natürliche Zahl.

4 Ausgewählte Themen der Kombinatorik

Aufgabe 4.1:

Es sei p die Anzahl möglicher Tipps beim Lotto (aus 49 Zahlen werden 6 Zahlen angekreuzt). Die Wahrscheinlichkeit, 6 Richtige zu haben, ist dann $1/p$. Berechnen Sie diesen Wert.

Aufgabe 4.2:

Es seien $x \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}$. Berechnen Sie:

$$(a) \quad (1+x)^n - \binom{n}{1} \cdot x \cdot (1+x)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^2 \cdot (1+x)^{n-2} - \dots (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot x^n.$$

$$(b) \quad (2+x)^n - \binom{n}{1} \cdot (x+1) \cdot (2+x)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot (x+1)^2 \cdot (2+x)^{n-2} - \dots (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot (x+1)^n.$$

$$(c) \quad (2+x)^n - \binom{n}{1} \cdot x \cdot (2+x)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^2 \cdot (2+x)^{n-2} - \dots (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot x^n.$$

Aufgabe 4.3:

Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie: Für jedes $x \in \mathbf{R}$ und jedes $y \in \mathbf{R}$ ist

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}.$$

Aufgabe 4.3:

Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbf{N}$ und jedes $x \in \mathbf{R}$ mit $x \geq 0$ gilt $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$.

Aufgabe 4.5 []:**

Es seien $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ und $k \in \mathbf{N}$. Zeigen Sie:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}.$$

Hinweis: Wenden Sie auf beide Seiten der Gleichung die Interpretation der Binomialkoeffizienten an, wie sie in Satz 4.1-4 gegeben wird.

Aufgabe 4.6:

Es sei M eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass M genauso viele Teilmengen mit gerader Mächtigkeit wie Teilmengen mit ungerader Mächtigkeit besitzt.

Aufgabe 4.7 [*]:

- (a) Berechnen Sie $n!$ für $n = 1, 2, \dots, 10$. Versuchen Sie, aus diesen Ergebnissen auf die Anzahl von Nullen zu schließen, mit denen $20!$ im Dezimalsystem endet.
- (b) Es sei $n \in \mathbf{N}$. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$\frac{(2 \cdot n)!}{2^n \cdot n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot n - 1).$$

Aufgabe 4.8:

Es seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{u, v, w, x, y, z\}$.

- (a) Wieviele injektive Abbildungen $f : A \rightarrow B$ gibt es?
- (b) [**] Wieviele injektive Abbildungen $f : A \rightarrow B$ gibt es, die zusätzlich ?

$$f(1) \neq v \text{ und } f(1) \neq w, \quad f(2) \neq u \text{ und } f(2) \neq w, \quad f(3) \neq x \text{ und } f(4) \neq v \text{ und } f(4) \neq x \text{ und } f(4) \neq y$$

erfüllen?

Aufgabe 4.9:

- (a) Bestimmen Sie mit Satz 4.3-2 die Anzahl der natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n \leq 100$, die nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar sind.
- (b) **[**]** Bestimmen Sie die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18,$$

mit der Zusatzbedingung $0 \leq x_i \leq 7$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

5 Ausgewählte Themen der Analysis

Aufgabe 5.1:

Versuchen Sie durch numerische Rechnungen festzustellen, welchen Grenzwert, wenn überhaupt, die jeweiligen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ haben:

(a) $a_0 = 0, a_n = \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ für $n \geq 1$.

(b) $a_0 = 0,07, a_n = 0,07^{a_{n-1}}$ für $n \geq 1$.

(c) **[**]** $a_0 = \frac{1}{3}, a_n = 3,3 \cdot a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1})$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 5.2:

Bestimmen Sie die Grenzwerte (falls sie überhaupt existieren) der nachstehenden Folgen für $n \rightarrow \infty$:

(a) $\left(\frac{2^n - 1}{2^n + 1} \right)_{n \in \mathbf{N}}$.

(b) $\left(\frac{(1 + 2/n) \cdot (3 \cdot n + 4/n)}{n + 1/n} \right)_{n \in \mathbf{N}}$.

(c) $\left(n^2 \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right)_{n \in \mathbf{N}}$.

Aufgabe 5.3:

Zeigen Sie durch Anwendung der Definition der Konvergenz, daß für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mit

$a_n = \frac{n-1}{n+1}$ die Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ gilt. Mit welchem $n \in \mathbf{N}$ beginnend ist $|a_n - 1| \leq 10^{-4}$?

Aufgabe 5.4:

Berechnen Sie

$$(a) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+3) \cdot (i+5)}.$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot (i+1)}.$$

$$(c) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2+3 \cdot 4^i}{5^i}.$$

$$(d) \quad \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

Aufgabe 5.5 [*]:

Konvergieren die folgenden Reihen? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$(a) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}.$$

$$(b) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{i!}.$$

$$(c) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot i - 1)}.$$

Aufgabe 5.6 [*]:

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ sei definiert durch $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Versuchen Sie festzustellen, wie groß $n \in \mathbb{N}$ sein muß, damit $3 < a_n \leq 4$ bzw. $a_n > 20$ gilt.

Hinweis: Versuchen Sie, in der Fachliteratur eine Formel zu finden, mit der sich a_n abschätzen läßt (Stichwort: Harmonische Zahl).

Aufgabe 5.7:

Geben Sie für die folgenden Funktionen $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ mit $X \subseteq \mathbf{R}$ den jeweiligen maximalen Definitionsbereich an:

(a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

(c) $f(x) = \frac{x^2}{x}$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x \cdot (x^2 - 1)}$.

(e) $f(x) = \sqrt{|x| - x}$.

(f) $f(x) = \sqrt{x - |x|}$.

Aufgabe 5.8:

Gegeben sei die Funktion

$$f: \begin{cases} [a, \infty[& \rightarrow & [b, \infty[\\ x & \rightarrow & x^2 - 2 \cdot x + 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Zahlen a und b so, daß f bijektiv ist.

Aufgabe 5.9:

Welche Monotonieeigenschaften besitzt die durch $f(x) = \sqrt{4 - x}$ definierte Funktion im Intervall $[0, 4]$? Zeigen Sie, dass sie in diesem Intervall nicht konvex ist.

Aufgabe 5.10:

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit

(a) $f(x) = |x|.$

(b) $f(x) = x \cdot |x|.$

(c) $f(x) = \lfloor x \rfloor.$

(d) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$

Zur Erinnerung: Für $x \in \mathbf{R}$ ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$.

Aufgabe 5.11:

Ein Wert $c \in X$ heißt **Fixpunkt** einer Funktion $f: X \rightarrow Y$, falls $f(c) = c$ gilt.

(a) Bestimmen Sie alle Fixpunkte der Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \rightarrow 3 \cdot x + 8 \end{cases}.$$

(b) Bestimmen Sie alle Fixpunkte der Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \rightarrow |x| \end{cases}.$$

(c) Der Definitionsbereich X von f bestehe aus allen Zeichenketten, die mit Hilfe des Alphabets $\mathbf{A} = \{A, B, C, \dots, Z, a, b, c, \dots, z\}$ gebildet werden können (man schreibt dafür auch $X = \mathbf{A}^*$). Die Abbildung f bildet Zeichenketten aus $\mathbf{A}^*$ auf andere Zeichenketten aus $\mathbf{A}^*$ ab, und zwar wird durch f eine Zeichenkette $z_1 z_2 \dots z_{n-1} z_n$ in die in ihrer Buchstabenfolge umgekehrte Zeichenkette abgebildet:

$$f(z_1 z_2 \dots z_{n-1} z_n) = z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1.$$

Die Länge einer Zeichenkette ist als die Anzahl ihrer Buchstaben definiert.

Bestimmen Sie einen Fixpunkt der Länge 3 und einen Fixpunkt der Länge 4. Beschreiben Sie die Fixpunkte der Länge $2 \cdot k$ und der Länge $2 \cdot k - 1$ für jedes $k \in \mathbf{N}$.

Aufgabe 5.12:

Bestimmen Sie alle reellwertigen Nullstellen der durch folgende Gleichungen $p(x)$ mit $x \in \mathbf{R}$ definierten Polynome:

(a) $p(x) = x^5 - 13 \cdot x^3 + 36 \cdot x$

Hinweis: Eine Nullstelle liegt zwischen 2,5 und 3,5.

(b) $p(x) = 3 \cdot x^3 - 24 \cdot x^2 + 45 \cdot x$.

(c) $p(x) = 3 \cdot x^4 - 11 \cdot x^2 - 4$.

(d) $p(x) = x^n - 1$ mit $n \in \mathbf{N}$

Hinweis: Unterscheiden Sie die beiden Fälle, dass n gerade bzw. ungerade ist.

Aufgabe 5.13:

Bestimmen Sie Definitionsbereich, Nullstellen, Pole, behebbare Unstetigkeitsstellen und Asymptoten für $x \rightarrow \pm\infty$ der folgenden durch $f(x)$ definierten gebrochen rationalen Funktionen, und skizzieren Sie den jeweiligen Kurvenverlauf.

(a) $f(x) = \frac{x^3 - 3 \cdot x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2}$.

(b) $f(x) = \frac{3 \cdot x^5 - 11 \cdot x^3 - 4 \cdot x}{2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 2}$.

(c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^4 - 3 \cdot x^2 - 4}$.

Aufgabe 5.14:

Berechnen Sie

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot \sqrt{2-x}}{x^2-1}.$

(c) $[*] \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$ mit $m \in \mathbf{N}$ und $n \in \mathbf{N}.$

Aufgabe 5.15:In der Definition der folgenden Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ kommt eine Konstante $a \in \mathbf{R}$ vor:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x - 3 & \text{für } x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \\ -\frac{11}{4} & \text{für } x \in]-\frac{1}{2}, 1] \\ x^2 - 2 \cdot x + a & \text{für } x \in]1, \infty[\end{cases}$$

Ist f an der Stelle $-\frac{1}{2}$ stetig? Welchen Wert muss man für a einsetzen, damit f an der Stelle $x_0 = 1$ stetig wird?

Aufgabe 5.16:Die Funktionen f und g seien durch $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2^x$ für $x \in \mathbf{R}$ definiert.

(a) Bestimmen Sie $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ und $\frac{f(2x)}{f(x)}.$

(b) Bestimmen Sie $\frac{g(x+1)}{g(x)}$ und $\frac{g(2x)}{g(x)}.$

(c) Wie kann man die Ergebnisse in (a) und (b) interpretieren?

Aufgabe 5.17 [*]:

Im folgenden sind jeweils vier Funktionen $f_i: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ gegeben, die bei wachsendem Argumentwert verschieden schnell anwachsen. Welche von ihnen wächst am schnellsten, welche am zweitschnellsten, welche am drittschnellsten und welche am langsamsten?

$$(a) \quad f_1(n) = n^3 \quad f_2(n) = n^2 \quad f_3(n) = (\log_2(n))^5 \quad f_4(n) = \frac{n^4}{\log_2(n)}.$$

$$(b) \quad f_1(n) = (\log_2(n))^2 \quad f_2(n) = \frac{n^2}{\log_2(n)} \quad f_3(n) = n \quad f_4(n) = n \cdot (\log_2(n))^3.$$

Aufgabe 5.18:

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen $f: X \rightarrow \mathbf{R}$:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x+2}{(x+3)^3}.$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{2 \cdot x^3 - 6 \cdot x - 10}{3 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5}.$$

$$(c) \quad f(x) = e^x \cdot \ln(x).$$

$$(d) \quad f(x) = (\sqrt{x} + 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right).$$

$$(e) \quad f(x) = \frac{1 - \ln(x)}{1 + \ln(x)}.$$

$$(f) \quad f(x) = 2^{(3^x)}.$$

Aufgabe 5.19:

Das Polynom $p(x)$ vom Grad > 2 besitze bei x_0 eine doppelte Nullstelle. Entscheiden Sie, ob $p(x)$ bei x_0 einen Extremwert oder einen Wendepunkt hat.

Hinweis: Man kann $p(x) = (x - x_0)^2 \cdot p_1(x)$ mit $p_1(x_0) \neq 0$ schreiben. Wenden Sie zur Ableitung auf diese Gleichung die Produktregel an.

Aufgabe 5.20 [*]:

Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^m \cdot (x^2 - 1)$ mit $m \in \mathbf{N}$ mit $m \geq 3$. Für welche $m \in \mathbf{N}$ hat $p(x)$ bei $x = 0$ einen Wendepunkt, und für welche $m \in \mathbf{N}$ einen Extremwert? Entscheiden Sie, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

Aufgabe 5.21:

Der Absatzverlauf eines Produkts sei in jedem Zeitpunkt t durch die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbf{R}_{>0} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ t & \rightarrow & t^2 \cdot e^{-2t} \end{cases} \quad (\text{Produktlebenszyklusfunktion})$$

beschreibbar.

- (a) Wann ist der Absatz maximal?
- (b) Wann nimmt der Absatz zu, und wann nimmt er ab?
- (c) Wann steigt der Absatz am schnellsten?
- (d) Bestimmen Sie (maximale) Bereiche, in denen die Funktion f konvex bzw. konkav ist.
- (e) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf von f .

Aufgabe 5.22 [*]:

Eine Größe x wird über einen gewissen Zeitraum beobachtet. Dabei wird festgestellt, daß x die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ und keine anderen Werte annimmt. Gesucht wird eine für alle Beobachtungen „repräsentative“ Größe $\bar{s}$. Es erscheint vernünftig, $\bar{s}$ so zu wählen, daß $\bar{s}$ die **mittlere quadratische Abweichung**

$$mqa(S) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - S)^2$$

minimiert, d.h. $\bar{s}$ ist gerade der Wert unter allen möglichen Werten von S , der zur minimalen mittleren quadratischen Abweichung führt. Bestimmen Sie $\bar{s}$.

Aufgabe 5.23:

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot x^4 - 6 \cdot x^2 + 3}{4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \ln(x+1)}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ mit $m \in \mathbf{N}$ und $n \in \mathbf{N}.$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}.$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln(1 - \sqrt{x}) - \ln(1 - x) \right).$

Aufgabe 5.24:

Bestimmen Sie die einzige positive Nullstelle des durch

$$p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$$

definierten Polynoms mit Hilfe des Newtonverfahrens.

Aufgabe 5.25:

Bestimmen Sie $\sqrt{\pi}$ auf 14 Dezimalstellen genau.

Aufgabe 5.26:

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung 3-ter Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ für die Funktion

$$f: \begin{cases}]-1, \infty[& \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \rightarrow \sqrt{1+x} \end{cases}.$$

Berechnen Sie damit eine Näherung für $\sqrt{1/2}$.

Aufgabe 5.27:

Das Polynom p werde durch $p(x) = x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$ definiert. Bestimmen Sie Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3 und a_4 so, dass

$$p(x) = \sum_{i=0}^4 a_i (x-3)^i$$

gilt. Entwickeln Sie dazu das Polynom in ein Taylorpolynom mit einer „geeigneten“ Ordnung.

Aufgabe 5.28 []:**

Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie dazu die Taylorentwicklung an der Stelle $x_0 = 0$ der durch

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \text{ definierten Funktion.}$$

Aufgabe 5.29:

Berechnen Sie das Taylorpolynom 5-ter Ordnung $T_5(x)$ für die durch

$$f(x) = x^2 \cdot e^x$$

definierte Funktion an der Stelle $x_0 = 0$. Können Sie eine einheitliche Formel für $f^{(n)}(x)$ angeben, die für jedes $n \in \mathbf{N}$ gilt? Gibt es noch einen einfacheren Weg, um $T_5(x)$ zu berechnen?

Aufgabe 5.30:

In dieser Aufgabe ist $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen (siehe Kapitel 5.10) und $n \geq 1$. Zeigen Sie:

- (a) $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n+1} = F_{2n+2}$.
- (b) $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.
- (c) $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
- (d) $F_{n+k} = F_k \cdot F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n$ für $k \geq 1$.
- (e) F_n ist genau dann gerade, wenn n durch 3 teilbar ist.
- (f) [*] F_n ist genau dann durch 4 teilbar, wenn n durch 6 teilbar ist.
- (g) [*] F_n ist genau dann durch 5 teilbar, wenn n durch 5 teilbar ist.
- (h) [*] Ist n durch m teilbar, so ist F_n durch F_m teilbar.

Aufgabe 5.31:

Ein Binärbaum heißt **vollständiger Binärbaum**, wenn jedes Niveau, bis auf das höchste Niveau, mit der maximalen Anzahl an Knoten belegt ist. Auf dem höchsten Niveau stehen alle Knoten möglichst weit links.

Die Knoten eines vollständigen Binärbaums mit n Knoten werden beginnend bei der Wurzel nach aufsteigenden Niveaus und auf jedem Niveau von links nach rechts mit den Nummern 1, 2, ..., n numeriert.

- (a) Welche Nummer bekommt dabei jeweils der Knoten eines Niveaus, der ganz links steht?
- (b) Ein Knoten, der zwei Nachfolger hat, habe in dieser Numerierung die Nummer i . Welche Nummern haben die beiden Nachfolger?

6 Ausgewählte Themen der Linearen Algebra

Aufgabe 6.1:

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 9 & -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & 5 \\ 9 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ und $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$.

Aufgabe 6.2:

- (a) Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Matrizen. Unter welchen Bedingungen gilt der binomische Lehrsatz $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2$? Wählen Sie als Beispiele für $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 6.3:

Es sei $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{(m,n)} = [a_{i,j}]_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$ eine Matrix. Die zu $\mathbf{A}$ **transponierte Matrix** ist die Matrix $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}_{(n,m)}^T = [\bar{a}_{i,j}]_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$ mit $\bar{a}_{i,j} = a_{j,i}$. Beim Vorgang der Transposition werden also Zeilen von $\mathbf{A}$ zu Spalten von $\mathbf{A}^T$ und umgekehrt.

Zeigen Sie:

- (a) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$, d.h. zweimalige Transposition hebt sich auf;
 $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, d.h. Transposition kehrt die Reihenfolge der Multiplikation um.

- (b) Welche Eigenschaften haben die Matrizen $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)$ und $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$? Sind diese Matrizen immer definiert?

Aufgabe 6.4:

Sind folgende Mengen von Vektoren jeweils linear-unabhängig oder linear-abhängig?

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$

(c) $\left\{ [3 \ 1 \ -1], [-1 \ -\frac{1}{3} \ \frac{1}{3}] \right\}.$

- (d) Die Menge $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ bestehend aus drei Vektoren sei linear-unabhängig. Gilt dieses dann auch für die Mengen $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{c}\}$ und $\{\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{c}\}$?

Aufgabe 6.5:

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

(a)
$$\begin{array}{rclcl} 2 \cdot x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3 \cdot x_1 & - & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & 17 \\ -x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & -9 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rclcl} 3 \cdot x_1 & - & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & 7 \\ 2 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & & & = & -2 \\ -x_1 & + & 5 \cdot x_2 & + & 4 \cdot x_3 & = & 7 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rclcl} 2 \cdot x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2 \cdot x_4 & = & 5 \\ -2 \cdot x_1 & - & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & - & x_4 & = & -9 \\ 4 \cdot x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & - & 2 \cdot x_4 & = & -7 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2 \cdot x_3 & + & 3 \cdot x_4 & = & 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(d)} & \begin{array}{rcl}
 2 \cdot x_1 & - & x_2 - x_3 = 4 \\
 & -2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 & = 0 \\
 4 \cdot x_1 & + & x_2 - x_3 = 8
 \end{array} \\
 \text{(e)} & \begin{array}{rcl}
 x_1 & + & x_2 + x_3 = 3 \\
 3 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 + x_3 = 5 \\
 2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 10
 \end{array} \\
 \text{(f)} & \begin{array}{rcl}
 x_1 & + & x_2 - x_3 = 3 \\
 2x_1 & + & x_2 - x_3 = 2 \\
 -x_1 & & -2x_3 = 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Aufgabe 6.6:

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & + & x_2 - x_3 = 1 \\
 2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 + a \cdot x_3 = 3 \\
 x_1 & + & a \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 2
 \end{array}$$

mit $a \in \mathbf{R}$. Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 6.7:

Bestimmen Sie den jeweiligen Rang der folgenden Matrizen:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\
 \text{(b)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Aufgabe 6.8:

Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen jeweils die inverse Matrix:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 \text{(b)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Aufgabe 6.9:

Zeigen Sie, dass für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ gilt:

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T.$$

Lösungen der Übungsaufgaben

Aufgabe 1.3:

- (a) Es handelt sich um eine Tautologie.
- (b) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R)$ ist keine Tautologie: für die Belegung von P , Q und R jeweils mit FALSCH ergibt sich links der Wahrheitswert WAHR (da P den Wahrheitswert FALSCH besitzt) und rechts der Wahrheitswert FALSCH (da $P \Rightarrow Q$ den Wahrheitswert WAHR und R den Wahrheitswert FALSCH hat).
- (c) Es handelt sich um eine Tautologie.
- (d) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ ist keine Tautologie: für die Belegung von P mit dem Wahrheitswert FALSCH und von Q mit dem Wahrheitswert WAHR ergibt sich insgesamt der Wahrheitswert FALSCH.
- (e) Es handelt sich um eine Tautologie.

Aufgabe 1.4:

Zu zeigen ist, dass $\triangleleft$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Da $n = 1 \cdot n$ ist, teilt n die Zahl n ohne Rest, d.h. $n \triangleleft n$; $\triangleleft$ ist reflexiv.

Aus $n \triangleleft m$ und $m \triangleleft n$ folgt $m = n \cdot k$ und $n = m \cdot h$ mit natürlichen Zahlen $k > 0$ und $h > 0$.
Daher ist $n \leq m$ und $m \leq n$, also $n = m$.

Aus $n \triangleleft m$ und $m \triangleleft l$ folgt $m = n \cdot k$ und $l = m \cdot h$ mit natürlichen Zahlen $k > 0$ und $h > 0$.
Daher ist $l = n \cdot (k \cdot h)$, d.h. n teilt l ohne Rest bzw. $n \triangleleft l$.

Diese Relation ist keine totale Ordnungsrelation: Beispielsweise gilt weder $3 \triangleleft 7$ noch $7 \triangleleft 3$.

Aufgabe 1.5:

Wegen $n + m = m + n$ ist $(n, m) \approx (n, m)$ (Reflexivität).

Es gelte $(n, m) \approx (k, l)$, d.h. $n + l = m + k$. Dann gilt auch $k + m = l + n$, also $(k, l) \approx (n, m)$ (Symmetrie).

Aus $(n, m) \approx (k, l)$ und $(k, l) \approx (g, h)$ folgt $n + l = m + k$ und $k + h = l + g$. Daher gilt $n + l + k + h = m + k + l + g$. Die linke Seite kann geschrieben werden als $(n + h) + (l + k)$, die rechte Seite als $(m + g) + (l + k)$. Aus Axiom 4 der natürlichen Zahlen folgt daraus $n + h = m + g$, d.h. $(n, m) \approx (g, h)$ (Transitivität).

Für $x = (10, 12)$ gilt $x \in [(3, 5)]_{\approx}$; für $y = (12, 10)$ gilt $y \in [(5, 3)]_{\approx}$; für $z = (2, 2)$ gilt $z \in [(3, 3)]_{\approx}$.

$[(3, 5)]_{\approx}$ ist die Menge aller Paare (n, m) mit $m = n + 2$: $[(3, 5)]_{\approx} = \{(n, n + 2) \mid n \in \mathbf{N}\}$.

$[(5, 3)]_{\approx}$ ist die Menge aller Paare (n, m) mit $n = m + 2$: $[(5, 3)]_{\approx} = \{(n + 2, n) \mid n \in \mathbf{N}\}$.

$[(3, 3)]_{\approx}$ ist die Menge aller Paare (n, m) mit $n = m$: $[(3, 3)]_{\approx} = \{(n, n) \mid n \in \mathbf{N}\}$.

Aufgabe 1.6:

(a) Es gelte $a \approx b$. Zu zeigen ist $[a]_{\approx} \subseteq [b]_{\approx}$ und $[b]_{\approx} \subseteq [a]_{\approx}$:

Es sei $c \in [a]_{\approx}$. Dann gilt $c \approx a$. Wegen der Transitivität von $\approx$ gilt $c \approx b$, d.h. $c \in [b]_{\approx}$. Genauso zeigt man $[b]_{\approx} \subseteq [a]_{\approx}$.

Es gelte umgekehrt $[a]_{\approx} = [b]_{\approx}$. Zu zeigen ist $a \approx b$:

Wegen $a \in [a]_{\approx}$ (Reflexivität) ist auch $a \in [b]_{\approx}$, also $a \approx b$.

(b) Ist $a \approx b$, dann ist nach (a) $[a]_{\approx} = [b]_{\approx}$. Es sei $x \in [a]_{\approx} \cap [b]_{\approx}$. Dann gilt $x \approx a$ und $x \approx b$. Mit der Symmetrie und der Transitivität der Äquivalenzrelation folgt nacheinander: $a \approx x$, $x \approx b$ und $a \approx b$. Mit (a) ist daher $[a]_{\approx} = [b]_{\approx}$. Enthalten also zwei Äquivalenzklassen ein gemeinsames Element, dann sind sie schon gleich. Daher ist für jedes $a \in M$ und jedes $b \in M$ entweder $[a]_{\approx} = [b]_{\approx}$ oder $[a]_{\approx} \cap [b]_{\approx} = \emptyset$.

(c) Offensichtlich gilt $\bigcup_{a \in M} [a]_{\approx} \subseteq M$; denn alle Äquivalenzklassen bestehen aus Elementen von M . Ist umgekehrt $x \in M$, dann ist wegen der Reflexivität ($x \approx x$): $x \in [x]_{\approx}$, also $x \in \bigcup_{a \in M} [a]_{\approx}$ d.h. $M \subseteq \bigcup_{a \in M} [a]_{\approx}$.

Aufgabe 1.7:

Die Länge der längeren Seite eines Blatts im DIN-A-0-Format sei h , die der kürzeren Seite sei b . Wenn man das Blatt einmal faltet, bleibt das Seitenverhältnis „(Länge der längeren Seite) zu (Länge der kürzeren Seite)“ erhalten. Es gilt also (da die kürzere Seite nach der Faltung die Länge $h/2$ und die längere Seite die Länge b aufweisen):

$$\frac{h}{b} = \frac{b}{h/2} = 2 \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^{-1},$$

$$\text{also } \frac{h}{b} = \sqrt{2} \text{ bzw. } h = \sqrt{2} \cdot b.$$

Im DIN-A-4-Format hat die längere Seite die Länge $h/4$ und die kürzere Seite die Länge $b/4$. Die Fläche eines Blatts im DIN-A-0-Format beträgt 1 m^2 , d.h. $h \cdot b = 1$ bzw. $b = 1/h$. Das ergibt $h = \sqrt{2} \cdot b = \sqrt{2} \cdot 1/h$ und $h^2 = \sqrt{2}$ bzw. $h = \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{1/4}$. Die längere Seite eines Blatts im DIN-A-4-Format ist also gleich $\frac{1}{4} \cdot 2^{1/4} \text{ m} = 29,7302 \text{ cm}$.

Aufgabe 1.8:

- (a) Die Behauptung gilt für $n = 0$. Sie gelte für n . Zu zeigen ist, dass aus dieser Annahme auch die Gültigkeit der Formel für $n+1$ folgt.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=0}^n i^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{nach Induktionsannahme} \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1) + 6 \cdot (n+1)^2}{6} \\ &= \frac{2 \cdot n^3 + 9 \cdot n^2 + 13 \cdot n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2 \cdot (n+1) + 1)}{6}. \end{aligned}$$

Die Formel gilt also auch für $n+1$.

- (b) Die Behauptung gilt für $n = 0$. Sie gelte für n . Zu zeigen ist, dass aus dieser Annahme auch die Gültigkeit der Formel für $n + 1$ folgt.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n+1} (2 \cdot i + 1) &= \sum_{i=0}^n (2 \cdot i + 1) + (2 \cdot (n+1) + 1) \\
 &= (n+1)^2 + (2 \cdot (n+1) + 1) \quad \text{nach Induktionsannahme} \\
 &= n^2 + 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 \\
 &= ((n+1) + 1)^2.
 \end{aligned}$$

- (c) Die Behauptung gilt für $n = 0$. Sie gelte für n . Zu zeigen ist, dass aus dieser Annahme auch die Gültigkeit der Formel für $n + 1$ folgt.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= \sum_{i=0}^n 2^i + 2^{n+1} \\
 &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \quad \text{nach Induktionsannahme} \\
 &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
 &= 2^{n+2} - 1.
 \end{aligned}$$

- (d) Für $n = 6$ ist $4 \cdot n = 24 < 29 = n^2 - 7$.

Die Behauptung gelte für $n \geq 6$. Zu zeigen ist, dass aus dieser Annahme auch die Gültigkeit der Formel für $n + 1$ folgt.

$$4 \cdot (n+1) = 4 \cdot n + 4 < (n^2 - 7) + 4 < (n^2 - 3) + 2 \cdot n - 3 = (n+1)^2 - 7.$$

Die erste Ungleichung ist die Induktionsannahme, die zweite gilt wegen $n \geq 6 > 3/2$.

- (e) Für $n = 0$ ist die Summe eine Quadratzahl, nämlich gleich 0. Die Behauptung, dass

$\sum_{i=0}^n i^3$ eine Quadratzahl ist, gelte für n . Zu zeigen ist, dass aus dieser Annahme folgt,

dass auch $\sum_{i=0}^{n+1} i^3$ eine Quadratzahl ist.

Zunächst werden einige kleinere Werte von n ausprobiert:

$$n = 0 : 0^3 = 0^2$$

$$n = 1 : 0^3 + 1^3 = 1^2$$

$$n = 2 : 0^3 + 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$

$$n = 3 : 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$

$$n = 4 : 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$$

$$n = 5 : 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$$

$$n = 6 : 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441 = 21^2.$$

Die Folge der auftretenden Zahlen, die quadriert vorkommen, ist 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21.

Diese Zahlen haben die Form $\frac{k \cdot (k+1)}{2}$. Die Vermutung liegt daher nahe, dass

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2$$

gilt. Für $n = 0, 1, \dots, 6$ stimmt diese Vermutung. Die Behauptung gelte für n . Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i^3 &= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \quad \text{nach Induktionsannahme} \\ &= \frac{n^4 + 6 \cdot n^3 + 13 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 4}{4} \\ &= \left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Also stimmt die Behauptung auch für $n+1$.

- (f) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ ist $2^n > n^2$: Für $n = 5$ stimmt die Behauptung ($2^5 = 32 > 25 = 5^2$). Sie gelte für $n \geq 5$. Dann ist

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 5 \cdot n > n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2.$$

Die Behauptung gilt also auch für $n+1$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ ist $2^n > n^3$: Für $n = 10$ stimmt die Behauptung ($2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$). Sie gelte für $n \geq 10$. Dann ist

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^3 = n^3 + n^3 \geq n^3 + 10 \cdot n^2 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n^2 + n^2 \\ &> n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 = (n+1)^3. \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 17$ ist $2^n > n^4$: Für $n = 17$ stimmt die Behauptung ($2^{17} = 131.072 > 10.000 = 10^4$). Sie gelte für $n \geq 17$. Dann ist

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^4 = n^4 + n^4 \geq n^4 + 17 \cdot n^3 = n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^3 + 4 \cdot n^3 + n^3 + 2 \cdot n^3 \\ &> n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 = (n+1)^4. \end{aligned}$$

Es sei $k \in \mathbb{N}$ eine feste natürliche Zahl mit $k \geq 1$. Für $k = 1, 2, 3, 4$ gilt $2^n > n^k$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (für $k = 1$ ist es klar, für $k = 2, 3, 4$ siehe die obigen Induktionsbeweise). Es gelte $k \geq 5$. Es wird $n_0 = 2^k$ gesetzt. Dann gilt für jedes $n \geq n_0$: $2^n > n^k$; denn:

Für den Induktionsanfang wird $n = 2^k$ gesetzt: $2^n = 2^{(2^k)} > 2^{k^2} = (2^k)^k$, denn nach obigem Induktionsbeweis ist $2^k > k^2$ für jedes $k \geq 5$. Es gelte $2^n > n^k$ für $n \geq n_0 = 2^k$. Zu zeigen ist, dass aus dieser Annahme $2^{n+1} > (n+1)^k$ folgt.

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^k = n^k + n^k \geq n^k + 2^k \cdot n^{k-1} = n^k + (2^k - 1) \cdot n^{k-1} + n^{k-1}.$$

Gemäß Hinweis in der Aufgabenstellung ist $(n+1)^k = n^k + a_1 \cdot n^{k-1} + a_2 \cdot n^{k-2} + \dots + a_k$ mit

$$\sum_{i=1}^k a_i = 2^k - 1. \text{ Formt man diese Formel noch etwas um, so erhält man}$$

$$(n+1)^k = n^k + a_1 \cdot n^{k-1} + a_2 \cdot n^{k-2} + \dots + a_k \leq n^k + \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \cdot n^{k-1} = n^k + (2^k - 1) \cdot n^{k-1}.$$

Diese Ungleichung wird oben eingesetzt, und man erhält:

$$2^{n+1} > n^k + (2^k - 1) \cdot n^{k-1} + n^{k-1} > n^k + (2^k - 1) \cdot n^{k-1} \geq (n+1)^k.$$

(g) Hier wird vollständige Induktion über k durchgeführt:

Für $n = 2^0 = 1$ ist $T(1) = 0 = (0-1) \cdot 1 + 1$. Die Behauptung gelte für $n = 2^k$. Zu zeigen ist, dass aus dieser Annahme die Gültigkeit der Formel auch für $n = 2^{k+1}$ folgt.

$$\begin{aligned} T(2^{k+1}) &= 2 \cdot T(2^k) + 2^{k+1} - 1 \\ &= 2 \cdot ((k-1) \cdot 2^k + 1) + 2^{k+1} - 1 \quad \text{nach Induktionsannahme} \\ &= k \cdot 2^{k+1} + 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.9:

$$(a) \quad \sum_{i=1}^5 2 \cdot i^2 = \sum_{k=0}^4 2 \cdot (k+1)^2.$$

$$(b) \quad \sum_{i=-2}^3 \frac{1}{i+3} = \sum_{n=1}^6 \frac{1}{n}.$$

$$(c) \quad \sum_{m=-1}^4 a^{2m+11} = \sum_{n=1}^6 a^{2n+7}.$$

Aufgabe 1.10:

$$(a) \quad \sum_{i=n}^m 2^{2i-4} - \sum_{i=n-2}^{m-2} 4^{i+1} = \sum_{i=n}^m 2^{2(i-2)} - \sum_{i=n-2}^{m-2} 4^{i+1} = \sum_{i=n}^m 4^{i-2} - \sum_{i=n-2}^{m-2} 4^{i+1} = \sum_{i=n}^m 4^{i-2} - \sum_{i=n+1}^{m+1} 4^{i-2} \\ = 4^{n-2} - 4^{m-1}.$$

$$(b) \quad \sum_{m=1}^4 \frac{m}{m+1} + \sum_{m=2}^5 \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^4 \frac{m}{m+1} + \sum_{m=1}^4 \frac{1}{m+1} = \sum_{m=1}^4 \frac{m+1}{m+1} = 4.$$

Aufgabe 1.11:

$$\frac{A}{i+3} + \frac{B}{i+5} = \frac{A(i+5) + B(i+3)}{(i+3)(i+5)} = \frac{(A+B)i + 5A + 3B}{(i+3)(i+5)} = \frac{1}{(i+3)(i+5)},$$

also $A+B=0$ und $5A+3B=1$. Daraus folgt $A=\frac{1}{2}$ und $B=-\frac{1}{2}$.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+3)(i+5)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+3} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+5} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{20} - \left(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} \right) \right).$$

Aufgabe 1.12:

$$\left(\sum_{i=0}^{100} x^i \right)^2 = \left(x^{100} + (x^{99} + \dots + x^0) \right)^2 \\ = x^{200} + 2x^{100}(x^{99} + \dots + x^0) + (x^{99} + \dots + x^0)^2$$

In der mittleren Summe ist die höchste Potenz 199, in der rechten Summe ist die höchste Potenz $2 \cdot 99 = 198$. Also ist $n = 200$.

Zur Berechnung von a_{50} wird die quadrierte Ausgangssumme anders aufgeteilt:

$$\left(\sum_{i=0}^{100} x^i \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{50} x^i + \sum_{i=51}^{100} x^i \right)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ mit } a = \sum_{i=0}^{50} x^i \text{ und } b = \sum_{i=51}^{100} x^i.$$

Alle Potenzen in b und b^2 sind größer als 50, also auch alle Potenzen in $2ab$. Man braucht also nur a^2 zu untersuchen:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= \left(\sum_{i=0}^{50} x^i \right) \cdot a \\
 &= (1 + x + x^2 + \dots + x^{49} + x^{50}) \cdot a \\
 &= a + xa + x^2a + \dots + x^{49}a + x^{50}a \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{50} x^i \right) + x \cdot \left(\sum_{i=0}^{50} x^i \right) + x^2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{50} x^i \right) + \dots + x^{49} \cdot \left(\sum_{i=0}^{50} x^i \right) + x^{50} \cdot \left(\sum_{i=0}^{50} x^i \right)
 \end{aligned}$$

Im ersten Summand ist der Koeffizient von x^{50} gleich 1, im zweiten Summand entsteht der Koeffizient von x^{50} aus $x \cdot x^{49}$ und ist gleich 1, im dritten Summand entsteht der Koeffizient von x^{50} aus $x^2 \cdot x^{48}$ und ist gleich 1 usw. Insgesamt kommt x^{50} 51-mal vor, d.h. $a_{50} = 51$.

Aufgabe 2.1:

Satz 2.2-2 (i):

Es sei $c \in C$. Zu zeigen ist: es gibt $a \in A$ mit $(g \circ f)(a) = c$.

Da g surjektiv ist, gibt es $b \in B$ mit $g(b) = c$. Zu b gibt es $a \in A$ mit $f(a) = b$, da f surjektiv ist. Dann ist $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

Satz 2.2-2 (ii):

Zu zeigen ist, dass $g \circ f$ linkseindeutig ist, d.h. für $a_1 \in A$ und $a_2 \in A$ folgt aus $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$: $a_1 = a_2$.

$(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2)$ impliziert wegen der Injektivität von g : $f(a_1) = f(a_2)$. Wegen der Injektivität von f folgt daraus $a_1 = a_2$.

Aufgabe 2.2:

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{1/2\} & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \rightarrow \frac{3 \cdot x + 4}{2 \cdot x - 1} \end{cases} \quad \text{und} \quad g : \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{3/2\} & \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \rightarrow \frac{x - 5}{2 \cdot x - 3} \end{cases}.$$

(a) Es seien $x_1 \in \mathbf{R} \setminus \{1/2\}$ und $x_2 \in \mathbf{R} \setminus \{1/2\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, d.h. $\frac{3 \cdot x_1 + 4}{2 \cdot x_1 - 1} = \frac{3 \cdot x_2 + 4}{2 \cdot x_2 - 1}$.

Daraus folgt nacheinander

$$\begin{aligned} (3 \cdot x_1 + 4) \cdot (2 \cdot x_2 - 1) &= (3 \cdot x_2 + 4) \cdot (2 \cdot x_1 - 1), \\ 6 \cdot x_1 \cdot x_2 - 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 - 4 &= 6 \cdot x_1 \cdot x_2 - 3 \cdot x_2 + 8 \cdot x_1 - 4, \\ 5 \cdot x_2 &= 5 \cdot x_1, \\ x_2 &= x_1. \end{aligned}$$

(b) $f(\mathbf{R} \setminus \{1/2\}) \subseteq \mathbf{R}$. Zu zeigen bleibt: $f(x) \neq 3/2$ für jedes $x \in \mathbf{R} \setminus \{1/2\}$.

Angenommen, es gilt $f(x) \neq 3/2$ für ein $x \in \mathbf{R} \setminus \{1/2\}$. Das bedeutet $\frac{3 \cdot x + 4}{2 \cdot x - 1} = \frac{3}{2}$. Daraus folgt (nachrechnen!) der Widerspruch $4 = -9/2$.

(c) Die Gleichung $y = \frac{3 \cdot x + 4}{2 \cdot x - 1}$ wird nach x aufgelöst: $x = \frac{y + 4}{2 \cdot y - 3}$, d.h. f^{-1} lautet

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbf{R} \setminus \{3/2\} & \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{1/2\} \\ x & \rightarrow \frac{x + 4}{2 \cdot x - 3} \end{cases}$$

$$(d) \quad (g \circ f)(x) = g\left(\frac{3 \cdot x + 4}{2 \cdot x - 1}\right) = \frac{\frac{3 \cdot x + 4}{2 \cdot x - 1} - 5}{2 \cdot \frac{3 \cdot x + 4}{2 \cdot x - 1} - 3} = \frac{-7 \cdot x + 9}{11}.$$

Aufgabe 2.3:

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ (x, y, z) & \rightarrow (x + y, y + z) \end{cases} :$$

Zu $(u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ wird gesetzt: $(x, y, z) = (u, 0, v)$.

Dann ist $f(x, y, z) = f(u, 0, v) = (u + 0, 0 + v) = (u, v)$. Das zeigt, dass f surjektiv ist.

Für die beiden verschiedenen Tripel $(x, 0, z)$ und $(x - 1, 1, z - 1)$ gilt

$$f(x, 0, z) = (x, z) = ((x - 1) + 1, (z - 1) + 1) = f(x - 1, 1, z - 1) \text{ Also ist } f \text{ nicht injektiv.}$$

$$g : \begin{cases} \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ (x, y) & \rightarrow (x, x + y, y) \end{cases} :$$

Das Tripel $(1, 3, 1) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ hat kein Urbild unter g , also ist g nicht surjektiv.

Es seien $(x_1, y_1) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ und $(x_2, y_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ mit $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2)$. Das bedeutet

$g(x_1, y_1) = (x_1, x_1 + y_1, y_1) = (x_2, x_2 + y_2, y_2) = g(x_2, y_2)$. Also gilt $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$. Die Funktion g ist also injektiv.

Aufgabe 2.4:

Das Beispiel $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}$ und $f : \begin{cases} A & \rightarrow B \\ x & \rightarrow x^2 \end{cases}$ zeigt, dass F und G nicht zueinander invers sind. Nimmt man etwa $U = \{1\}$, $U \subseteq A$, dann ist $f(U) = f(\{1\}) = \{1\}$ und $f^{-1}(f(U)) = f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\} \neq U$.

Aufgabe 2.5:

- (a) Ist die Ausgangsmenge A endlich, so ist jede Teilmenge ebenfalls endlich und damit abzählbar. Die Ausgangsmenge A sei also abzählbar unendlich mit der Bijektion $f : \mathbf{N} \rightarrow A$, und es sei $B \subseteq A$. Ist B endlich oder $B = A$, so ist B abzählbar.

B sei unendlich und $A \setminus B \neq \emptyset$. Da $B \subseteq A$ ist, haben alle Elemente von B durch die Funktion $f : \mathbf{N} \rightarrow A$ eine Nummer. Elemente in $A \setminus B$ tragen ebenfalls durch f eine Nummer, so dass man für die Numerierung von B nicht einfach die Funktion f nehmen kann; denn die Zuordnungsvorschrift $h : \begin{cases} \mathbf{N} & \rightarrow B \\ n & \rightarrow f(n) \end{cases}$ ist keine Abbildung (für ein Element $n \in \mathbf{N}$ mit $f(n) \in A \setminus B$ bildet h nicht nach B ab, so dass h nicht linkstotal ist).

Eine Bijektion zwischen $\mathbf{N}$ und B wird daher wie folgt definiert:

$h : \mathbf{N} \rightarrow B$ mit

$h(0) = f(\min\{m \mid f(m) \in B\})$ und

$h(n+1) = f\left(\min\left\{m \mid f(m) \in B \setminus \bigcup_{i \leq n} \{f(i)\}\right\}\right)$ für $n \geq 0$.

- (b) Es sei A eine unendlich abzählbare Menge, aus der man n viele Elemente entfernt. Die Abzählung von A sei $f : \mathbf{N} \rightarrow A$. Die Nummern der entfernten Elemente seien $i_1, \dots, i_j, i_{j+1}, \dots, i_n$ mit $i_1 < \dots < i_j < i_{j+1} < \dots < i_n$. Dann ist die folgende Funktion g eine bijektive Abbildung, die $A \setminus \{f(i_1), \dots, f(i_n)\}$ abzählt:

für $m < i_1$ ist $g(m) = f(m)$. Der Wert i_1 wird auf $f(i_1 + 1)$ abgebildet, wenn $i_1 + 1 \neq i_2$ ist. Jeder Wert m mit $i_1 \leq m \leq i_2 - 2$ wird auf $f(m + 1)$ abgebildet. Der Wert $m = i_2 - 1$ wird nicht auf $f(m + 1)$ abgebildet, da das Element $f(i_2)$ ja gerade entfernt wurde. Vielmehr wird $m = i_2 - 1$ auf $f(i_2 + 1) = f(m + 2)$ abgebildet (falls i_3 nicht gerade gleich

$i_2 + 1$ ist. Jedes m mit $i_2 - 1 \leq m \leq i_3 - 3$ wird auf $f(m+2)$ abgebildet. Den Werten m mit $i_3 - 2 \leq m \leq i_4 - 4$ wird jeweils $f(m+3)$ zugeordnet usw. Allgemein lautet die Abbildungsvorschrift zur Numerierung von $A \setminus \{f(i_1), \dots, f(i_n)\}$:

$$g: \begin{cases} \mathbf{N} & \rightarrow A \setminus \{f(i_1), \dots, f(i_n)\} \\ m & \rightarrow \begin{cases} f(m) & \text{für } m < i_1 \\ f(m+j) & \text{für } i_j - (j-1) \leq m \leq i_{j+1} - (j+1) \text{ mit } 1 \leq j < n \\ f(m+n) & \text{für } m \geq i_n - n + 1 \end{cases} \end{cases}$$

- (c) Zu zeigen ist, dass die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist. Es wird hier nur der Fall gezeigt, dass alle beteiligten Mengen unendlich abzählbar sind (siehe Bemerkung am Ende der Lösung).

Es sei I eine abzählbare unendliche Menge mit einer Numerierung durch die Bijektion $f: \mathbf{N} \rightarrow I$. Die Mengen A_i für $i \in I$ seien jeweils unendlich abzählbar mit der Bijektion $g_i: \mathbf{N} \rightarrow A_i$. Ist $i \in I$ mit $i = f(n_i)$ mit einer eindeutig bestimmten Nummer n_i , so lässt sich die Menge $A_i = A_{f(n_i)}$ darstellen als

$$\begin{aligned} A_i &= \{g_i(0), g_i(1), g_i(2), \dots\} \\ &= \{g_{f(n_i)}(0), g_{f(n_i)}(1), g_{f(n_i)}(2), \dots\}. \end{aligned}$$

Es wird eine Abzählung (Bijektion) $h: \mathbf{N} \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ angegeben. Dazu ist zu beachten, dass es für jedes $n \in \mathbf{N}$ nur endlich viele Zahlen j und k mit $j+k=n$ gibt:

$$n=0: j=k=0,$$

$$n=1: j=0 \text{ und } k=1, j=1 \text{ und } k=0,$$

$$n=2: j=0 \text{ und } k=2, j=1 \text{ und } k=1, j=2 \text{ und } k=0,$$

...

$$n=m: j=0 \text{ und } k=m, j=1 \text{ und } k=m-1, \dots, j=m \text{ und } k=0.$$

Die Elemente von $\bigcup_{i \in I} A_i$ werden in folgender Reihenfolge abgezählt:

Zuerst kommen alle Elemente der Form $g_{f(j)}(k)$ mit $j+k=0$ (das ist nur das Element $g_{f(0)}(0)$); dann kommen alle Elemente $g_{f(j)}(k)$ mit $j+k=1$ (das sind die Elemente $g_{f(0)}(1)$ und $g_{f(1)}(0)$); anschließend kommen die Elemente $g_{f(j)}(k)$ mit $j+k=2$ (das

sind die Elemente $g_{f(0)}(2)$, $g_{f(1)}(1)$ und $g_{f(2)}(0)$ usw. Zu beachten ist, dass $g_{f(j)}(k)$ das k -te Element in der Menge $A_{f(j)}$ ist mit der für $A_{f(j)}$ „zuständigen“ Abzählung $g_{f(j)} : \mathbf{N} \rightarrow A_{f(j)}$.

Der Anfang der Abzählung lautet also:

$$g_{f(0)}(0), g_{f(0)}(1), g_{f(1)}(0), g_{f(0)}(2), g_{f(1)}(1), g_{f(2)}(0), \dots$$

Ähnlich wie bei der Abzählung der positiven rationalen Zahlen wird nun eine Bijektion $h : \mathbf{N} \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ konstruiert:

Zu jedem $n \in \mathbf{N}$ mit $n > 0$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbf{N}$ mit $\frac{m \cdot (m+1)}{2} \leq n < \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2}$. Die folgende Tabelle zeigt einige Werte von n und m :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5

Jede dieser Zahlen n hat also eine eindeutige Darstellung $n = \frac{m \cdot (m+1)}{2} + k$ mit

$$0 \leq k \leq m. \text{ Die Zuordnung } h' : \begin{cases} \mathbf{N} & \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N} \\ n & \rightarrow \begin{cases} (0, 0) & \text{für } n = 0 \\ (n_1, n_2) = (k, m-k) & \text{für } n \geq 1 \end{cases} \end{cases} \text{ ist daher eine}$$

bijektive Abbildung (Abzählung von $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$), mit deren Hilfe man nun $h : \mathbf{N} \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ angeben kann:

$$h : \begin{cases} \mathbf{N} & \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \\ n & \rightarrow g_{f(n_1)}(n_2) \text{ mit } (n_1, n_2) = h'(n) \end{cases}$$

Bemerkung: Ist die Indexmenge I endlich, so kann man $\bigcup_{i \in I} A_i$ ähnlich abzählen wie die positiven rationalen Zahlen (als Paare natürlicher Zahlen). Ist eine der beteiligten Mengen A_i mit $i = f(n_i)$ endlich, etwa

$A_i = \{g_{f(n_i)}(0), g_{f(n_i)}(1), g_{f(n_i)}(2), \dots, g_{f(n_i)}(l-1)\}$, so ist die obige Abbildung h' so abzuwandeln, dass in ihrem Bild keine Paare (n_i, n_2) mit $n_2 \geq l$ entstehen.

Aufgabe 2.6:

Offensichtlich ist $a \sim_f a$. Es gelte $a \sim_f b$, d.h. $f(a) = f(b)$, also auch $f(b) = f(a)$ bzw. $b \sim_f a$. Aus $a \sim_f b$ und $b \sim_f c$ folgt $f(a) = f(b)$ und $f(b) = f(c)$, also $f(a) = f(c)$, d.h. $a \sim_f c$.

Ist f injektiv, so bestehen die Äquivalenzklassen von $\sim_f$ aus einelementigen Mengen: $[a]_{\sim_f} = \{ a \}$.

Aufgabe 3.1:

- (a) Von den sechs aufeinanderfolgenden Zahlen $p-5$, $p-4$, $p-3$, $p-2$, $p-1$ und p sind genau zwei durch 3 teilbar. Die Primzahl p und die Zahl $p-3$ sind nicht durch 3 teilbar. Ist $p \equiv 1 \pmod{3}$, dann ist $p-1 \equiv 0 \pmod{3}$ und $p-1$ durch 3 teilbar. Ist $p \equiv 2 \pmod{3}$, dann ist $p-5 \equiv -3 \equiv 0 \pmod{3}$ und $p-5$ durch 3 teilbar. Beide Zahlen $p-5$ und $p-1$ sind gerade. Daher ist 6 ein Teiler von $p-1$ oder von $p-5$.
- (b) Es seien n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ und $n+5$ mit $n > 3$ gegeben. Ist keine dieser Zahlen eine Primzahl, so stimmt die zu beweisende Behauptung.

Ist $n > 3$ Primzahl, so sind $n+1$, $n+3$ und $n+5$ als gerade Zahlen keine Primzahl. Ist $n+4$ Primzahl, so ist nach Aufgabe (a) $n+3$ oder $n-1$ durch 6 teilbar. Ist $n+3$ durch 6 teilbar, dann auch durch 3, und folglich ist auch $n = (n+3)-3$ durch 3 teilbar, was aber der Annahme widerspricht, $n > 3$ sei Primzahl. Also ist $n-1$ durch 6 (und damit auch durch 3) teilbar. Daraus folgt, dass $n+2 = (n-1)+3$ durch 3 teilbar ist. Sind also n und $n+4$ Primzahlen, so sind unter n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ und $n+5$ keine weiteren Primzahlen.

Sind n und $n+2$ Primzahlen, so sind nach Aufgabe (a) $n+1$ oder $n-3$ durch 6 teilbar. Wieder scheidet $n-3$ aus (denn sonst wäre $n = (n-3)+3$ durch 3 teilbar). Also ist $n+1$ durch 6 und damit auch durch 3 teilbar, und folglich ist $n+4 = (n+1)+3$ durch 3 teilbar. Sind daher n und $n+2$ Primzahlen, so sind unter n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ und $n+5$ keine weiteren Primzahlen.

Geht man anstelle von n als Primzahl von einer anderen der Zahlen n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ und $n+5$ als Primzahl aus, so argumentiert man genauso.

Aufgabe 3.2:

Die 30 aufeinanderfolgenden Zahlen seien $n, n+1, \dots, n+29$. Sind die ersten fünf Zahlen sämtlich zusammengesetzt, so ist nichts mehr zu zeigen. Daher wird angenommen, dass unter den ersten fünf Zahlen eine Primzahl $p \geq 31$ ist (dabei sei p die kleinste Primzahl mit dieser Eigenschaft). Es ist $p \leq n+4$. Nach Aufgabe 3.1 (a) ist 6 ein Teiler von $p-1$ oder von $p-5$.

1. Fall: $p \equiv 1 \pmod{6}$, d.h. $p \equiv 1 \pmod{2}$ und $p \equiv 1 \pmod{3}$

Ist $p \equiv 1 \pmod{5}$ dann sind die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $p+1, \dots, p+5$ zusammengesetzt, denn es gilt: $p+1 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+2 \equiv 0 \pmod{3}$, $p+3 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+4 \equiv 0 \pmod{5}$ und $p+5 \equiv 0 \pmod{2}$.

Ist $p \equiv 2 \pmod{5}$ dann sind die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $p+17, \dots, p+21$ zusammengesetzt, denn es gilt: $p+17 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+18 \equiv 0 \pmod{5}$, $p+19 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+20 \equiv 0 \pmod{3}$ und $p+21 \equiv 0 \pmod{2}$. Es ist $p+21 \leq n+4+21 = n+25 < n+29$

Ist $p \equiv 3 \pmod{5}$ dann sind die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $p+11, \dots, p+15$ zusammengesetzt, denn es gilt: $p+11 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+12 \equiv 0 \pmod{5}$, $p+13 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+14 \equiv 0 \pmod{3}$ und $p+15 \equiv 0 \pmod{2}$.

Ist $p \equiv 4 \pmod{5}$ dann sind die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $p+5, \dots, p+9$ zusammengesetzt, denn es gilt: $p+5 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+6 \equiv 0 \pmod{5}$, $p+7 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+8 \equiv 0 \pmod{3}$ und $p+9 \equiv 0 \pmod{2}$.

2. Fall: $p \equiv 5 \pmod{6}$, d.h. $p \equiv 1 \pmod{2}$ und $p \equiv 2 \pmod{3}$

Ist $p \equiv 1 \pmod{5}$ dann sind die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $p+13, \dots, p+17$ zusammengesetzt, denn es gilt: $p+13 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+14 \equiv 0 \pmod{5}$, $p+15 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+16 \equiv 0 \pmod{3}$ und $p+17 \equiv 0 \pmod{2}$.

Ist $p \equiv 2 \pmod{5}$ dann sind die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $p+7, \dots, p+11$ zusammengesetzt, denn es gilt: $p+7 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+8 \equiv 0 \pmod{5}$, $p+9 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+10 \equiv 0 \pmod{3}$ und $p+11 \equiv 0 \pmod{2}$.

Ist $p \equiv 3 \pmod{5}$ dann sind die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $p+1, \dots, p+5$ zusammengesetzt, denn es gilt: $p+1 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+2 \equiv 0 \pmod{5}$, $p+3 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+4 \equiv 0 \pmod{3}$ und $p+5 \equiv 0 \pmod{2}$.

Ist $p \equiv 4 \pmod{5}$ dann sind die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen $p+3, \dots, p+7$ zusammengesetzt, denn es gilt: $p+3 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+4 \equiv 0 \pmod{3}$, $p+5 \equiv 0 \pmod{2}$, $p+6 \equiv 0 \pmod{5}$ und $p+7 \equiv 0 \pmod{3}$.

Die 30 aufeinanderfolgenden Zahlen seien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{30}$. Nach Aufgabe 3.1 (b) sind unter $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ höchstens zwei Primzah-

len. Sind es a_1 und a_3 , so kann die nächstmögliche Primzahl a_7 sein; genauso verhält es sich, wenn es a_1 und a_5 sind. Die an a_7 nächstmöglichen anschließenden Primzahlen können entweder a_9 oder a_{11} und dann erst wieder a_{13} sein usw. Da es 5 Sechserblöcke aufeinanderfolgender Zahlen sind, gibt es insgesamt also unter den 30 Zahlen höchstens 10 Primzahlen.

Aufgabe 3.3:

$$12121212 = \sum_{i=0}^3 12 \cdot 10^{2i} = 12 \cdot \sum_{i=0}^3 10^{2i}. \text{ Wegen } 12 \equiv 1 \pmod{11} \text{ und } 10 \equiv -1 \pmod{11} \text{ ist}$$

$$12 \cdot \sum_{i=0}^3 10^{2i} \equiv 1 \cdot \sum_{i=0}^3 (-1)^{2i} = 4 \pmod{11}.$$

$$12345678 = 12 \cdot 10^6 + 345 \cdot 10^3 + 678. \text{ Es ist } 10^3 \equiv 0 \pmod{250}, \text{ also}$$

$$12 \cdot 10^6 + 345 \cdot 10^3 + 678 \equiv 678 \equiv 178 \pmod{250}.$$

Aufgabe 3.4:

- (a) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ ist entweder a gerade oder a ungerade. Im ersten Fall ist $a = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, im zweiten Fall ist $a = 2 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist entweder $a^2 = 4 \cdot k^2$ oder $a^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$. Daher ist entweder $a^2 \bmod 4 = 0$ oder $a^2 \bmod 4 = 1$.

- (b) Die Zahlen 11, 111, 1111, 11111, ... haben die Form $a = \underbrace{1 \dots 1}_{n\text{-mal}} = \left[\underbrace{1 \dots 1}_{n\text{-mal}} \right]_{10} = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot 10^i$ mit $n \geq 2$. Wäre a ein Quadrat, so ist nach Aufgabe (a) $a \bmod 4 = 0$ oder $a \bmod 4 = 1$. Da $10 \equiv 2 \pmod{4}$ gilt, ist $10^i \equiv 2^i \pmod{4}$ und

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} 10^i \equiv \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}; \quad 2^n - 1 \equiv -1 \pmod{4} \text{ gilt wegen } n \geq 2. \text{ Daher ist die Zahl } a \text{ kein Quadrat.}$$

Die Zahlen (in Dezimalschreibweise) 101, 10101, 1010101, 101010101, ... haben die Form $a = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot (10^2)^i$ mit $n \geq 2$. Es gilt $a \bmod 4 = 1$, also geht die Argumentation über Aufgabe (a) nicht.

Angenommen, a ist ein Quadrat, d.h. $a = m^2$. Dann ist $a - 1 = m^2 - 1 = (m - 1) \cdot (m + 1)$. Da $a - 1$ gerade ist, kann m nicht gerade sein; denn dann ist $(m - 1) \cdot (m + 1)$ ungerade. Also hat m die Form $m = 2 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $a - 1 = (2 \cdot k) \cdot (2 \cdot k + 2) = 4 \cdot k \cdot (k + 1)$. Es ist $a - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} (10^2)^i$ und

$$\frac{a-1}{4} = \sum_{i=1}^{n-1} 25 \cdot (10^2)^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-2} 25 \cdot (10^2)^i, \text{ d.h. } \frac{a-1}{4} \text{ endet mit der Dezimalziffernfolge 25.}$$

Es ist $k = k' \cdot 10 + k_0$ mit $k' \in \mathbb{N}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k_0 \leq 9$ (k_0 ist die niedrigstwertige Dezimalziffer von k). Dann ist

$$\begin{aligned} k \cdot (k+1) &= (k' \cdot 10 + k_0) \cdot (k' \cdot 10 + k_0 + 1) \\ &= (k' \cdot 10)^2 + (k' \cdot 10) \cdot (2 \cdot k_0 + 1) + k_0 \cdot (k_0 + 1). \end{aligned}$$

Die letzte Dezimalziffer des Produkts $k_0 \cdot (k_0 + 1)$ bestimmt also die letzte Dezimalziffer von $\frac{a-1}{4}$, die gleich 5 ist. Die folgende Tabelle gibt alle Möglichkeiten der letzten Dezimalziffer von $k_0 \cdot (k_0 + 1)$ an:

k_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k_0 \cdot (k_0 + 1)$	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90
letzte Ziffer	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

Man sieht, dass die Ziffer 5 nicht vorkommt. Daher ist die Annahme, a sei ein Quadrat, falsch.

Aufgabe 3.5:

Es werden nur die nichtnegativen $a \in \mathbb{Z}$ untersucht, da $a^2 \geq 0$ ist.

1. Fall: a ist einstellig, d.h. $a \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a \leq 9$.

Die folgende Tabelle zeigt alle Werte a^2 für $a \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a \leq 9$:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Man sieht: Für diese Werte gilt $(a^2 \bmod 100) \neq 45$.

2. Fall: a ist zweistellig, d.h. $10 \leq a \leq 99$.

a hat die Form $a = a_1 \cdot 10 + a_0$ mit $a_1 \in \{1, \dots, 9\}$ und $a_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Es ist $a^2 = 100 \cdot a_1^2 + 20 \cdot a_0 \cdot a_1 + a_0^2$, d.h. $(a^2 \bmod 100) = (20 \cdot a_0 \cdot a_1 + a_0^2) \bmod 100$. Die zu untersuchende Behauptung reduziert sich also auf die Frage, ob es eine Zahlenkombination a_0 und a_1 gibt, so dass $20 \cdot a_0 \cdot a_1 + a_0^2 = 100 \cdot k + 45$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Die letzte Ziffer ist dabei eine 5. Der Anteil $20 \cdot a_0 \cdot a_1$ liefert eine Zahl mit Endziffer 0, d.h. der einzige Kandidat, der 5 bzw. 45 liefern könnte, ist a_0^2 . Obige Tabelle zeigt, daß nur $a_0 = 5$ in Frage kommt. In diesem Fall ist $20 \cdot a_0 \cdot a_1 + a_0^2 = 100 \cdot a_1 + 25$, d.h. $(20 \cdot a_0 \cdot a_1 + a_0^2) \bmod 100 = 25 \neq 45$.

3 Fall: a hat mehr als zwei Stellen, d.h. $a \geq 100$.

Dann ist $a = a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Es wird $x = a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_2 \cdot 100$ und $y = a_1 \cdot 10 + a_0$ gesetzt, d.h. $a = x + y$. Für y gilt $0 \leq y \leq 99$. Nun ist

$$(a^2 \bmod 100) = ((x+y)^2 \bmod 100) = ((x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2) \bmod 100) = (y^2 \bmod 100).$$

Aufgrund der Überlegungen zum 1. und 2. Fall ergibt $y^2 \bmod 100$ mit $0 \leq y \leq 99$ aber nicht den Wert 45.

Aufgabe 3.6:

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist $n+1$ ein Teiler von $n^2 + 1$.

Es sei $n \geq 2$. Es gilt $n^2 + 1 = (n+1)^2 - 2 \cdot n$. Wäre $n+1$ ein Teiler von $n^2 + 1$, dann wäre $n+1$ ein Teiler von $2 \cdot n$. Wegen $n+1 > 2$ ist $\text{ggT}(n, n+1) = 1$, und somit wäre $n+1$ ein Teiler von 2. Das ist wegen $n+1 > 2$ nicht möglich. Also ist für $n \geq 2$ der Wert $n+1$ kein Teiler von $n^2 + 1$.

Aufgabe 3.7:

- (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv 1 \pmod{5}$ gilt $4 \cdot n^2 + 1 \equiv 4 \cdot 1^2 + 1 = 5 \equiv 0 \pmod{5}$. Ebenso gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv -1 \equiv 4 \pmod{5}$: $4 \cdot n^2 + 1 \equiv 4 \cdot 1^2 + 1 = 5 \equiv 0 \pmod{5}$. Für jedes $n \in [1]_5$ oder $n \in [1]_4$ gilt $4 \cdot n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$; das sind unendlich viele Werte.
- (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv 4 \pmod{13}$ ist $4 \cdot n^2 + 1 \equiv 65 \equiv 0 \pmod{13}$. Ebenso gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv 9 \pmod{13}$ ist $4 \cdot n^2 + 1 \equiv 325 \equiv 0 \pmod{13}$.
- (c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv 2 \pmod{17}$ ist $4 \cdot n^2 + 1 \equiv 17 \equiv 0 \pmod{17}$. Ebenso gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv 15 \pmod{17}$ ist $4 \cdot n^2 + 1 \equiv 901 \equiv 0 \pmod{17}$.

Aufgabe 3.8:

- (a) $\text{ggT}(28, 15) = 1, a = 7, b = -13$.
- (b) $\text{ggT}(198, 84) = 6, a = 3, b = -7$.

(a) Für $a = 0$ ist $a^i = 0$ für $1 \leq i \leq 12$. Die übrigen Werte können der folgenden Tabelle entnommen werden.

[illegible]

- (b) Für $a = 0$ ist $a^i = 0$ für $1 \leq i \leq 14$. Die übrigen Werte können der folgenden Tabelle entnommen werden.

$a \bmod 15$	$a^i \bmod 15$ für $i = 1, \dots, 14$
1	1 für $i = 1, \dots, 14$
2	2, 4, 8, $16 \equiv 1$, 2, 4, 8, $16 \equiv 1$, 2, 4, 8, $16 \equiv 1$, 2, 4
3	3, 9, $27 \equiv 12$, $36 \equiv 6$, $18 \equiv 3$, 9, $27 \equiv 12$, $36 \equiv 6$, $18 \equiv 3$, 9, $27 \equiv 12$, $36 \equiv 6$, $18 \equiv 3$, 9
4	4, $16 \equiv 1$, 4, $16 \equiv 1$, 4, $16 \equiv 1$, 4, $16 \equiv 1$, 4, $16 \equiv 1$, 4, $16 \equiv 1$, 4, $16 \equiv 1$
5	5, $25 \equiv 10$, $50 \equiv 5$, $25 \equiv 10$, $50 \equiv 5$, $25 \equiv 10$, $50 \equiv 5$, $25 \equiv 10$, $50 \equiv 5$, $25 \equiv 10$, $50 \equiv 5$, $25 \equiv 10$, $50 \equiv 5$, $25 \equiv 10$
6	6, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$, $36 \equiv 6$
7	7, $49 \equiv 4$, $28 \equiv 13$, $91 \equiv 1$, 7, $49 \equiv 4$, $28 \equiv 13$, $91 \equiv 1$, 7, $49 \equiv 4$, $28 \equiv 13$, $91 \equiv 1$, 7, $49 \equiv 4$
8	8, $64 \equiv 4$, $32 \equiv 2$, $16 \equiv 1$, 8, $64 \equiv 4$, $32 \equiv 2$, $16 \equiv 1$, 8, $64 \equiv 4$, $32 \equiv 2$, $16 \equiv 1$, 8, $64 \equiv 4$
9	9, $81 \equiv 6$, $54 \equiv 9$, $81 \equiv 6$, $54 \equiv 9$, $81 \equiv 6$, $54 \equiv 9$, $81 \equiv 6$, $54 \equiv 9$, $81 \equiv 6$, $54 \equiv 9$, $81 \equiv 6$, $54 \equiv 9$, $81 \equiv 6$
10	10, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$, $100 \equiv 10$
11	11, $121 \equiv 1$, 11, $121 \equiv 1$, 11, $121 \equiv 1$, 11, $121 \equiv 1$, 11, $121 \equiv 1$, 11, $121 \equiv 1$, 11, $121 \equiv 1$, 11, $121 \equiv 1$
12	12, $144 \equiv 9$, $108 \equiv 3$, $36 \equiv 6$, $72 \equiv 12$, $144 \equiv 9$, $108 \equiv 3$, $36 \equiv 6$, $72 \equiv 12$, $144 \equiv 9$, $108 \equiv 3$, $36 \equiv 6$, $72 \equiv 12$, $144 \equiv 9$
13	13, $169 \equiv 4$, $52 \equiv 7$, $91 \equiv 1$, 13, $169 \equiv 4$, $52 \equiv 7$, $91 \equiv 1$, 13, $169 \equiv 4$, $52 \equiv 7$, $91 \equiv 1$, 13, $169 \equiv 4$
14	14, $196 \equiv 1$, 14, $196 \equiv 1$, 14, $196 \equiv 1$, 14, $196 \equiv 1$, 14, $196 \equiv 1$, 14, $196 \equiv 1$, 14, $196 \equiv 1$, 14, $196 \equiv 1$

Aufgabe 3.10:

Da $9 = 3^2$ ist, kommen als $\text{ggT}(2^n + 1, 9)$ nur die Zahlen 1, 3 oder 9 in Frage. Zunächst werden einige Werte für n ausprobiert:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		11	13	15	17
$2^n + 1$	2	3	5	9	17	33	65	129	257	513		2.049	8.193	32.769	131.073
$\text{ggT}(2^n + 1, 9)$	1	3	1	9	1	3	1	3	1	9		3	3	9	3

Sieht man sich die dritte Zeile an, so liegt folgende Vermutung nahe:

Für jedes gerade $n \in \mathbf{N}$ ist $ggT(2^n + 1, 9) = 1$.

Für jedes ungerade $n \in \mathbf{N}$ der Form $n = 2 \cdot k + 1$ mit $k = 1, 4, 7, \dots$ ist $ggT(2^n + 1, 9) = 9$, ansonsten ist für ungerades n $ggT(2^n + 1, 9) = 3$. Diese Vermutung kann man zusammenfassen (und dann auch beweisen):

$$ggT(2^n + 1, 9) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2 \cdot k \text{ mit } k \in \mathbf{N}, \text{ d.h. für gerades } n \\ 3 & \text{für } n = 2 \cdot k + 1 \text{ mit } k \in \mathbf{N} \text{ und } (k \equiv 0 \pmod{3} \text{ oder } k \equiv 2 \pmod{3}) \\ 9 & \text{für } n = 2 \cdot k + 1 \text{ mit } k \in \mathbf{N} \text{ und } k \equiv 1 \pmod{3} . \end{cases}$$

Beweis: Es sei $n \in \mathbf{N}$ gerade, d.h. $n = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbf{N}$.

$2^n + 1 = 2^{2k} + 1 = 4^k + 1 \equiv 2 \pmod{3}$. Also teilt 3 nicht den Wert $2^n + 1$ und $ggT(2^n + 1, 9) = 1$.

Es sei $n \in \mathbf{N}$ ungerade, d.h. $n = 2 \cdot k + 1$ für ein $k \in \mathbf{N}$.

$2^n + 1 = 2^{2k+1} + 1 = 2 \cdot 4^k + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, d.h. $2^n + 1$ ist durch 3 teilbar. Zu untersuchen bleibt, wann $2^n + 1$ auch durch 9 teilbar ist, wann also $2^n + 1 = 2 \cdot 4^k + 1 \equiv 0 \pmod{9}$ gilt. Dazu werden zunächst einige Werte $4^k \pmod{9}$ ausgerechnet:

$$\begin{aligned} 4^0 &\equiv 1 \pmod{9}, \quad 4^1 \equiv 4 \pmod{9}, \quad 4^2 = 16 \equiv 7 \pmod{9}, \\ 4^3 &\equiv 7 \cdot 4 = 28 \equiv 1 \pmod{9}, \quad 4^4 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{9}, \quad 4^5 \equiv 4 \cdot 4 = 16 \equiv 7 \pmod{9} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Offensichtlich kommen für $4^k \pmod{9}$ nur die Werte 1, 4 oder 7 vor:

$$4^k \equiv \begin{cases} 1 \pmod{9} & \text{für } k \equiv 0 \pmod{3} \\ 4 \pmod{9} & \text{für } k \equiv 1 \pmod{3} \\ 7 \pmod{9} & \text{für } k \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Also ist für $k \equiv 0 \pmod{3}$: $2^n + 1 = 2 \cdot 4^k + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 \equiv 3 \pmod{9}$,

für $k \equiv 1 \pmod{3}$: $2^n + 1 = 2 \cdot 4^k + 1 \equiv 2 \cdot 4 + 1 \equiv 0 \pmod{9}$,

für $k \equiv 2 \pmod{3}$: $2^n + 1 = 2 \cdot 4^k + 1 \equiv 2 \cdot 7 + 1 = 15 \equiv 6 \pmod{9}$.

Da $27 = 3^3$ ist, kommen als $ggT(2^n + 1, 27)$ nur die Zahlen 1, 3, 9 oder 27 in Frage. Damit $2^n + 1$ durch 27 teilbar ist, muss es durch 3 und 9 teilbar sein. Alle Werte $2^n + 1$ für gerades n sind nicht durch 3 teilbar. Alle Werte $2^n + 1$ für ungerades n mit $n = 2 \cdot k + 1$ für ein $k \in \mathbf{N}$ und $(k \equiv 0 \pmod{3} \text{ oder } k \equiv 2 \pmod{3})$ sind nicht durch 9 teilbar. Damit $2^n + 1$ durch 9 oder

27 teilbar ist, muss n die Form $n = 2 \cdot k + 1$ für ein $k \in \mathbf{N}$ mit $k \equiv 1 \pmod{3}$ haben. Von diesen Zahlen sind einige durch 9 aber nicht durch 27 teilbar. Um einen Hinweis auf diese Zahlen zu bekommen, werden einige kleine Werte berechnet:

k	$2 \cdot 4^k + 1$	teilbar durch 27?
1	9	nein
4	513	ja
7	32.769	nein
10	2.097.153	nein
13	134.217.729	ja
16	8.589.934.593	nein
19	549.755.813.889	nein
22	35.184.372.088.833	ja

Folgende Vermutung liegt nahe:

Für jedes $k \in \mathbf{N}$ mit $k \equiv 1 \pmod{3}$ gilt: Ist $k \equiv 4 \pmod{9}$, dann ist die Zahl $2 \cdot 4^k + 1$ durch 27 teilbar. Für $k \equiv 1 \pmod{9}$ oder $k \equiv 7 \pmod{9}$ ist die Zahl $2 \cdot 4^k + 1$ durch 9, aber nicht durch 27 teilbar.

Beweis: Für die Resten modulo 9, nämlich $r = 0, 1, \dots, 8$, gilt nur für $r = 1, r = 4$ und $r = 7$: $r \equiv 1 \pmod{3}$. Also sind für $k \in \mathbf{N}$ mit $k \equiv 1 \pmod{3}$ nur die Fälle $k \equiv 1 \pmod{9}$, $k \equiv 4 \pmod{9}$ und $k \equiv 7 \pmod{9}$ zu untersuchen. Nach den obigen Überlegungen ist für diese k der Wert $2 \cdot 4^k + 1$ durch 9 teilbar.

Für $k \equiv 1 \pmod{9}$ kann man k schreiben als $k = 1 + l \cdot 9$ mit $l \in \mathbf{N}$. Dann ist wegen $4^9 = 262.144 \equiv 1 \pmod{27}$:

$$2 \cdot 4^k + 1 = 2 \cdot 4^{1+l \cdot 9} + 1 = 2 \cdot 4^1 \cdot 4^{l \cdot 9} + 1 \equiv 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 = 9 \pmod{27}.$$

Für $k \equiv 4 \pmod{9}$ kann man k schreiben als $k = 4 + l \cdot 9$ mit $l \in \mathbf{N}$. Dann gilt wegen $513 \equiv 0 \pmod{27}$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4^k + 1 &= 2 \cdot 4^{4+l \cdot 9} + 1 = (2 \cdot 4^4 + 1) \cdot 4^{l \cdot 9} - 4^{l \cdot 9} + 1 = 513 \cdot 4^{l \cdot 9} - 4^{l \cdot 9} + 1 \\ &\equiv 0 \cdot 1^l - 1^l + 1 = 0 \pmod{27}. \end{aligned}$$

Für $k \equiv 7 \pmod{9}$ kann man k schreiben als $k = 7 + l \cdot 9$ mit $l \in \mathbf{N}$. Dann gilt wegen $2 \cdot 4^7 + 1 = 32.769 \equiv 18 \pmod{27}$:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 4^k + 1 &= 2 \cdot 4^{7+l^9} + 1 = (2 \cdot 4^7 + 1) \cdot 4^{l^9} - 4^{l^9} + 1 = 32.769 \cdot 4^{l^9} - 4^{l^9} + 1 \\
 &\equiv 18 \cdot 1^l - 1^l + 1 = 18 \pmod{27} .
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt also:

$$\text{ggT}(2^n + 1, 27) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2 \cdot k \text{ mit } k \in \mathbf{N}, \text{ d.h. für gerades } n \\ 3 & \text{für } n = 2 \cdot k + 1 \text{ mit } k \in \mathbf{N} \text{ und } (k \equiv 0 \pmod{3} \text{ oder } k \equiv 2 \pmod{3}) \\ 9 & \text{für } n = 2 \cdot k + 1 \text{ mit } k \in \mathbf{N} \text{ und } (k \equiv 1 \pmod{9} \text{ oder } k \equiv 7 \pmod{9}) \\ 27 & \text{für } n = 2 \cdot k + 1 \text{ mit } k \in \mathbf{N} \text{ und } k \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}$$

Es sei n ungerade, d.h. $n = 2 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbf{N}$. Für die Teilbarkeit von $2^n + 1 = 2 \cdot 4^k + 1$ durch 3^m braucht man nur diejenigen k zu untersuchen, für die $k \equiv 1 \pmod{3}$ gilt. Ein Teil dieser Zahlen ist durch 9 und nicht durch 27 oder eine höhere 3er-Potenz teilbar, ein anderer Teil durch 27 und keine höhere 3er-Potenz, ein weiterer Teil durch 81 und keine höhere 3er-Potenz teilbar usw. In der folgenden Tabelle sind diejenigen Werte k aufgeführt, für die $2^n + 1 = 2 \cdot 4^k + 1$ durch kleine 3er-Potenzen (in der Kopfzeile) teilbar ist:

	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	$81 = 3^4$	$243 = 3^5$
$k =$	1			
	4	4		
	7			
	10			
	13	13	13	
	16			
	19			
	22	22		
	25			
	28			
	31	31		
	34			
	37			
	40	40	40	40
	43			
	46			
	49	49		
	52			
	...			67

Zur Untersuchung des $\text{ggT}(2^n + 1, 3^m)$ werden einige Hilfsbehauptungen aufgestellt.

Im folgenden sei $m \in \mathbf{N}$ mit $m \geq 1$. Dann gilt:

(a) $4^{3^{m-1}} \equiv 1 \pmod{3^m}.$

(b) $2^{3^{m-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^m}.$

(c) Mit $k_0 = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{m-2} = \sum_{i=0}^{m-2} 3^i = \frac{3^{m-1} - 1}{2}$ und $k = k_0 + t \cdot 3^{m-1}$ ist

$$2 \cdot 4^k + 1 \equiv 0 \pmod{3^m}.$$

Beweis von (a): Für $m = 1$ stimmt die Behauptung, und sie gelte für $m \geq 1$. Zu zeigen ist, dass aus dieser Annahme die Behauptung auch für $m+1$ folgt.

$$\begin{aligned}
 4^{3^m} &= 4^{3^{m-1} \cdot 3} = \left(4^{3^{m-1}}\right)^3 \\
 &= (1 + t \cdot 3^m)^3 \quad \text{nach Induktionsannahme } 4^{3^{m-1}} \equiv 1 \pmod{3^m} \\
 &= 1 + 3 \cdot t \cdot 3^m + 3 \cdot (t \cdot 3^m)^2 + (t \cdot 3^m)^3 \\
 &\equiv 1 \pmod{3^{m+1}}.
 \end{aligned}$$

Beweis von (b): Für $m = 1$ stimmt die Behauptung, und sie gelte für $m \geq 1$. Zu zeigen ist, dass aus dieser Annahme die Behauptung auch für $m+1$ folgt.

$$\begin{aligned}
 2^{3^m} + 1 &= 2^{3^{m-1} \cdot 3} + 1 \\
 &= (t \cdot 3^m - 1)^3 + 1 \quad \text{nach Induktionsannahme } 2^{3^{m-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{3^m} \\
 &= (t \cdot 3^m)^3 - 3 \cdot (t \cdot 3^m)^2 + 3 \cdot t \cdot 3^m - 1 + 1 \\
 &\equiv 0 \pmod{3^{m+1}}.
 \end{aligned}$$

Beweis von (c): $2 \cdot 4^{k_0} + 1 = 2 \cdot 4^{1+3+3^2+\dots+3^{m-2}} + 1$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot 4^{(3^m-1)/2} + 1 \\
 &= 2 \cdot 2^{3^{m-1}-1} + 1 \\
 &= 2^{3^{m-1}} + 1 \\
 &\equiv 0 \pmod{3^m} \quad \text{nach (b)}
 \end{aligned}$$

Ist $k = k_0 + t \cdot 3^{m-1}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 4^k + 1 &= 2 \cdot 4^{k_0+t \cdot 3^{m-1}} + 1 \\
 &= (2 \cdot 4^{k_0} + 1) \cdot 4^{t \cdot 3^{m-1}} - 4^{t \cdot 3^{m-1}} + 1 \\
 &\equiv 0 \cdot 4^{t \cdot 3^{m-1}} - 1^t + 1 \quad \text{nach (a)} \\
 &\equiv 0 \pmod{3^m}.
 \end{aligned}$$

Mit (c) folgt nun das Ergebnis:

Ist $n = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathbf{N}$, dann ist $\text{ggT}(2^n + 1, 3^m) = 1$.

Ist $n = 2 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbf{N}$ und ist $j \in \mathbf{N}$ der größte Wert mit $k \leq m-1$ und $k \equiv \frac{3^j - 1}{2} \pmod{3^j}$, dann ist $\text{ggT}(2^n + 1, 3^m) = 3^{j+1}$.

Aufgabe 3.11:

- (a) Nach Satz 3.2-4 ist $a \in \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ genau dann invertierbar, wenn $\text{ggT}(a, 21) = 1$ ist. Also sind 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19 und 20 alle invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.
- (b) $7 \cdot x + 14 \equiv 3 \pmod{45}$ ist gleichbedeutend mit $7 \cdot x \equiv -11 \equiv 34 \pmod{45}$. Gemäß Satz 3.3-5 werden Zahlen a' und n' bestimmt mit $a' \cdot 7 + n' \cdot 45 = \text{ggT}(7, 45) = 1$. Die PAS-CAL-Funktion invers ermittelt $a' = 13$ und $n' = -2$. Mit $x = a' \cdot 33 = 442 \equiv 37 \pmod{45}$ gilt $7 \cdot x + 14 \equiv 3 \pmod{45}$.

Aufgabe 3.12:

$10^n = 2^n \cdot 5^n$. Daher ist mit Satz 3.4-1 (ii) und (iii):

$$\phi(10^n) = \phi(2^n) \cdot \phi(5^n) = (2^n - 2^{n-1}) \cdot (5^n - 5^{n-1}) = 2^{n-1} \cdot (2-1) \cdot 5^{n-1} \cdot (5-1) = 4 \cdot 10^{n-1}.$$

Aufgabe 3.13:

- (a) Es sei $a \in \mathbb{N}$. Ist a gerade, etwa $a = 2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$, dann ist

$$a^p - a = (2 \cdot k)^p - (2 \cdot k) = 2 \cdot (2^{p-1} \cdot k^p - k)$$

ebenfalls gerade. Ist a ungerade, etwa $a = 2 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\begin{aligned} a^p - a &= (2 \cdot k + 1)^p - (2 \cdot k + 1) \\ &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \cdot (2 \cdot k)^i - (2 \cdot k + 1) \\ &= (2 \cdot k)^0 + \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} \cdot (2 \cdot k)^i - 2 \cdot k - 1 \\ &= \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} \cdot (2 \cdot k)^i - 2 \cdot k, \end{aligned}$$

also eine gerade Zahl. Daher ist 2 ein Teiler von $a^p - a$.

Gilt $\text{ggT}(a, p) = 1$, dann ist nach Satz 3.4-4: $a^{\phi(p)} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Daraus folgt nacheinander $a^p \equiv a \pmod{p}$, $a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$, und p teilt $a^p - a$.

Gilt $\text{ggT}(a, p) = p$, dann $a = a' \cdot p$ und $a^p - a = a'^p \cdot p^p - a' \cdot p = p \cdot (a'^p \cdot p^{p-1} - a')$, also ist auch hier p ein Teiler von $a^p - a$.

- (b) Mit Aufgabe (a) für $p = 5$ gilt: 10 ist ein Teiler von $a^5 - a$. Daher haben a und a^5 dieselbe Endziffer.

Aufgabe 3.14:

- (a) Es gilt nach Satz 3.4-3 (i): $20^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Wegen $350 = 6 \cdot 58 + 2$ ist

$$\begin{aligned} 20^{350} &= (20^6)^{58} \cdot 20^2 \\ &\equiv 20^2 \equiv 6^2 = 36 \equiv 1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

- (b) Es gilt nach Satz 3.4-3 (i): $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. Dann ist

$$3^{82} = 3^{5 \cdot 16 + 2} \equiv 3^2 = 9 \pmod{17}.$$

- (c) Um $2^{17} \pmod{19}$ zu berechnen, kann man auf kleineren 2er-Potenzen aufbauen: Es folgt nacheinander $2^4 = 16 \equiv -3 \pmod{19}$, $2^8 \equiv (-3)^2 = 9 \pmod{19}$, $2^{16} \equiv 81 \equiv 5 \pmod{19}$, $2^{17} \equiv 10 \pmod{19}$.

- (d) Nach Satz 3.4-3 (i) ist $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. $2^{p-1} = 2 \cdot 2^{p-2} = 1 + t \cdot p$ mit $t \in \mathbb{N}$, also $2^{p-2} = (1 + t \cdot p)/2$. Da $p \geq 3$ ungerade und 2^{p-1} gerade ist, kann t nur ungerade sein, insbesondere $t \geq 1$. Es gilt: $(1 + t \cdot p)/2 \equiv \frac{p+1}{2} \pmod{p}$; denn

$$(1 + t \cdot p)/2 - \frac{p+1}{2} = \frac{(t-1) \cdot p}{2} \equiv 0 \pmod{p}. \text{ Außerdem ist } 0 \leq \frac{p+1}{2} < p, \text{ so dass}$$

$$2^{p-2} \equiv \frac{p+1}{2} \pmod{p} \text{ folgt.}$$

- (e) Es gilt nach Satz 3.4-3 (i): $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ und $3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Daher ist $2^{70} = (2^{60}) \cdot 2^{10} \equiv 2^{10} = 1024 \equiv 10 \pmod{13}$ und $3^{70} = (3^{60}) \cdot 3^{10} \equiv 3^{10} = 59.049 \equiv 3 \pmod{13}$. Damit ist $(2^{70} + 3^{70}) \pmod{13} = 13 \pmod{13} = 0$.

Aufgabe 3.15:

- (a) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Es sind insgesamt 8 Fälle zu untersuchen, je nachdem, ob 2 bzw. 3 bzw. 7 die Zahl n teilt oder nicht. Exemplarisch werden hier nur die beiden folgenden Fälle dargestellt:

Fall 1: Weder 2 noch 3 noch 7 teilt n .

Nach Satz 3.4-3 gilt: $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$, $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ und $n \equiv 1 \pmod{2}$. Dann gilt auch: $n^6 \equiv 1 \pmod{3}$ und $n^6 \equiv 1 \pmod{2}$. Damit teilen 7, 3 und 2 (und damit 42) jeweils den Wert $n^7 - n$.

Fall 2: 2 teilt n und weder 3 noch 7 teilt n .

Nach Satz 3.4-3 gilt: $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$ und $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Dann gilt auch $n^6 \equiv 1 \pmod{3}$. Damit teilen 7 und 3 jeweils den Wert $n^7 - n$. 2 teilt nach Fallannahme den Wert $n^7 - n$. Also ist 42 ein Teiler von $n^7 - n$.

- (b) Es ist $\frac{1}{5} \cdot n^5 + \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{7}{15} \cdot n = \frac{3 \cdot n^5 + 5 \cdot n^3 + 7}{15}$. Es wird gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbf{N}$ der Wert $3 \cdot n^5 + 5 \cdot n^3 + 7$ durch $15 = 3 \cdot 5$ teilbar ist. Dazu wird folgende Fallunterscheidung getroffen:

Fall 1: Weder 3 noch 5 teilt n .

Nach Satz 3.4-3 gilt: $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$ und $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$, d.h. 5 teilt $n^5 - n$, und 3 teilt $n^3 - n$. Dann teilt 15 den Wert $3 \cdot n^5 - 3 \cdot n$ und den Wert $5 \cdot n^3 - 5 \cdot n$. Es ist $3 \cdot n^5 + 5 \cdot n^3 + 7 = 3 \cdot n^5 - 3 \cdot n + 5 \cdot n^3 - 5 \cdot n + 15 \cdot n$. Also teilt 15 den Wert $3 \cdot n^5 + 5 \cdot n^3 + 7$.

Fall 2: 3 teilt n .

Aus der Fallannahme folgt: 3 teilt $n^3 - n$. Ist $\text{ggT}(n, 5) = 1$, so gilt nach Satz 3.4-3: $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$, und damit teilt 5 den Wert $n^5 - n$. Ist $\text{ggT}(n, 5) = 5$, dann teilt 5 die Zahl n und damit auch den Wert $n^5 - n$. Nun kann man wie im Fall 1 weiter argumentieren.

Fall 3: 5 teilt n .

Hier verläuft die Argumentation wie in Fall 2.

Aufgabe 4.1:

$$p = \binom{49}{6}, \text{ d.h. } 1/p = 1/\binom{49}{6} = 1/13.983.816 \approx 7,15 \cdot 10^{-8}.$$

Aufgabe 4.2:

Es seien $x \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}$. Berechnen Sie:

$$(a) \quad (1+x)^n - \binom{n}{1} \cdot x \cdot (1+x)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^2 \cdot (1+x)^{n-2} - \dots (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot x^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (-x)^i \cdot (1+x)^{n-i}.$$

$$= (-x + 1 + x)^n = 1^n = 1$$

$$(b) \quad (2+x)^n - \binom{n}{1} \cdot (x+1) \cdot (2+x)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot (x+1)^2 \cdot (2+x)^{n-2} - \dots (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot (x+1)^n$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (-(x+1))^i \cdot (2+x)^{n-i} = (-(x+1) + 2+x)^n = 1$$

$$(c) \quad (2+x)^n - \binom{n}{1} \cdot x \cdot (2+x)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^2 \cdot (2+x)^{n-2} - \dots (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot x^n$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (-x)^i \cdot (2+x)^{n-i} = (-x + 2+x)^n = 2^n$$

Aufgabe 4.3:

$$(x+y)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \cdot x^i \cdot y^{p-i} = y^p + x^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \cdot x^i \cdot y^{p-i} \equiv x^p + y^p \pmod{p}, \text{ da alle Werte } \binom{p}{i}$$

den Faktor p enthalten.

Aufgabe 4.3:

Für $n = 0$ und $n = 1$ stimmt die Behauptung. Es sei $n \geq 2$. Dann ist

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^i = 1 + n \cdot x + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \cdot x^i \geq 1 + n \cdot x.$$

Aufgabe 4.5:

Es seien A und B disjunkte Mengen mit $|A| = n$ und $|B| = m$. Auf der linken Seite des Gleichheitszeichens steht die Anzahl k -elementiger Teilmengen von $A \cup B$. Es sei C eine k -elementige Teilmengen von $A \cup B$. Hat C mit A genau i Elemente gemeinsam, dann hat C mit B genau $k - i$ Elemente gemeinsam. Das bedeutet, dass man jeder k -elementigen Teilmenge von $A \cup B$, die genau i Elemente aus A enthält, alle $(k - i)$ -elementigen Teilmengen von B zuordnen kann. Das sind genau $\binom{m}{k-i}$ viele. Daher gilt

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}.$$

Aufgabe 4.6:

Die Menge M besitze genau n Elemente. Die Anzahl der Teilmengen mit genau i Elementen ist $\binom{n}{i}$. Satz 4.1-3 (iii) besagt nun gerade die zu zeigende Behauptung:

$$\sum_{\substack{i=0 \\ (i \bmod 2)=0}}^n \binom{n}{i} = \sum_{\substack{i=0 \\ (i \bmod 2)=1}}^n \binom{n}{i}.$$

Aufgabe 4.7:

(a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40.320	362.880	3.628.800

Vermutung: ab $15!$ eine Null mehr, ab $20!$ eine weitere Null mehr.

Bemerkung: Die Anzahl der Nullen am Ende von $n!$ gilt lautet

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{125} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor + \dots$$

$$(b) \quad \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n)}{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

Im Zähler ist jede zweite Zahl gerade, also von der Form $2i$:

Der Zähler lautet:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n) &= 1 \cdot (2 \cdot 1) \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n) \\ &= (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)) \cdot (2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) \end{aligned}$$

(In der letzten Zeile stehen in der ersten Klammer die ungeraden Faktoren von $(2n)!$. In der zweiten Klammer stehen die ausgeklammerten 2'en aus den geraden Faktoren von $(2n)!$. In der dritten Klammer stehen die „Reste“ aus den geraden Faktoren von $(2n)!$, nachdem die 2'en ausgeklammert wurden. Durch Kürzen ergibt sich also

$$\frac{(2 \cdot n)!}{2^n \cdot n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1).$$

Aufgabe 4.8:

Es seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{u, v, w, x, y, z\}$, also $|A| = 5$ und $|B| = 6$

(a) Die Anzahl injektiver Abbildungen $f : A \rightarrow B$ ist nach Satz 4.2-3 gleich

$$\frac{6!}{(6-5)!} = 6! = 720.$$

(b) Es sei M die Menge aller injektiven Abbildungen $f : A \rightarrow B$. Mit

$$A_1 = \{f \mid f : A \rightarrow B \text{ und } f \text{ ist injektiv und } f(1) = v \text{ oder } f(1) = w\},$$

$$A_2 = \{f \mid f : A \rightarrow B \text{ und } f \text{ ist injektiv und } f(2) = u \text{ oder } f(2) = w\},$$

$$A_3 = \{f \mid f : A \rightarrow B \text{ und } f \text{ ist injektiv und } f(3) = x\},$$

$$A_4 = \{f \mid f : A \rightarrow B \text{ und } f \text{ ist injektiv und } f(4) = v \text{ oder } f(4) = x \text{ oder } f(4) = y\}$$

ist die gesuchte Anzahl gleich der Anzahl der Elemente in M , die in keiner der Mengen $A_1, \dots, A_4$ liegen. Nach Satz 4.3-2 ist diese gesuchte Anzahl gleich

$$|M| + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, 4\} \\ \text{und } I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|} \cdot \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \text{ mit } l = 4.$$

Nach Aufgabe (a) ist $|M| = 720$.

Es ist $|A_1| = 2 \cdot \frac{5!}{1!}$, denn für $f \in A_1$ ist bereits $f(1)$ festgelegt, d.h. es müssen noch $f(i)$ für $i = 2, 3, 4, 5$ bestimmt werden, und in der Zielmenge sind durch die Festlegung von $f(1)$ nur noch 5 Elemente verfügbar. Also gibt es mit der Festlegung $f(1) = v$ in A_1 $5/(5-4)!$ viele injektive Funktionen. Entsprechend gibt es mit der Festlegung $f(1) = w$ noch einmal $5/(5-4)!$ viele injektive Funktionen. Genauso folgt $|A_2| = 2 \cdot \frac{5!}{1!}$, $|A_3| = \frac{5!}{1!}$ und $|A_4| = 3 \cdot \frac{5!}{1!}$.

Es sei $f \in A_1 \cap A_2$. Dann sind zwei Funktionswerte festgelegt, nämlich $f(1)$ und $f(2)$, und die Zielmenge hat nur noch 4 mögliche nicht festlegte Elemente. Außerdem kann für $f(1) = w$ nicht auch $f(2) = w$ gelten, denn f ist ja injektiv. Daher ist

$$|A_1 \cap A_2| = 3 \cdot \frac{4!}{(4-3)!}.$$

Entsprechend folgt $|A_1 \cap A_3| = 2 \cdot \frac{4!}{(4-3)!}$, $|A_1 \cap A_4| = 5 \cdot \frac{4!}{(4-3)!}$, $|A_2 \cap A_3| = 2 \cdot \frac{4!}{(4-3)!}$, $|A_2 \cap A_4| = 6 \cdot \frac{4!}{(4-3)!}$ und $|A_3 \cap A_4| = 2 \cdot \frac{4!}{(4-3)!}$.

Es werden jetzt die Schnitte aus jeweils 3 Mengen A_i betrachtet:

Dabei gibt es bei einer getroffenen Festlegung für jeweils 3 Elemente $\frac{3!}{(3-2)!}$ mögliche injektive Abbildungen. Daher ist

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 \cdot \frac{3!}{(3-2)!},$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 7 \cdot \frac{3!}{(3-2)!},$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 3 \cdot \frac{3!}{(3-2)!},$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4 \cdot \frac{3!}{(3-2)!}.$$

Mit denselben Überlegungen folgt

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4 \cdot \frac{2!}{(2-1)!}.$$

Insgesamt ergibt sich für die gesuchte Anzahl

$$720 - 8 \cdot 5! + 20 \cdot 4! - 17 \cdot 3! + 4 \cdot 2! = 146.$$

Aufgabe 4.9:

- (a) Es bezeichne $A_i = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ und } 1 \leq n \leq 100, \text{ und } i \text{ teilt } n\}$.

$|A_2| = 50$, $|A_3| = 33$ und $|A_5| = 20$. $|A_2 \cap A_3| = 16$, $|A_2 \cap A_5| = 10$ und $|A_3 \cap A_5| = 6$.
 $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 3$. Dann ist nach Satz 4.3-2 die Anzahl der natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n \leq 100$, die nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar sind, gleich

$$100 - (50 + 33 + 20) + (16 + 10 + 6) - 3 = 26.$$

- (b) Es wird zunächst die Anzahl der ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung

$$x_1 + \dots + x_n = r$$

bestimmt: Die Zahl r kann man sich als eine Folge von r 1'en vorstellen, und die Aufteilung des Werts r auf n Unbestimmte x_i kann man dadurch beschreiben, dass man in die Folge der r 1'en $n-1$ Trennstriche einfügt. Dem Wert x_1 entspricht dann die Anzahl der 1'en vor dem ersten Trennstrich, dem Wert x_2 die Anzahl der 1'en zwischen dem ersten und dem zweiten Trennstrich usw., und dem Wert x_n entspricht die Anzahl der 1'en nach dem letzten Trennstrich. Die Anzahl der ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung $x_1 + \dots + x_n = r$ wird also durch die Anzahl der Möglichkeiten bestimmt, aus den $n+r-1$ Positionen für 1'en und Trennstriche r Positionen für die 1'en auszuwählen. Das sind

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Möglichkeiten.

In der Aufgabe ist $r = 18$ und $n = 4$. Also gibt es $\binom{21}{18} = 1330$ ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ mit $x_i \geq 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Es bezeichne L_i für $i = 1, 2, 3, 4$ die Lösungen mit $x_i > 7$ bzw. $x_i \geq 8$. Es gilt aus Symmetriegründen:

$$|L_1| = |L_2| = |L_3| = |L_4|.$$

Jeder Lösung der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ mit $x_1 \geq 8$ entspricht eine Lösung der Gleichung $(x_1 - 8) + x_2 + x_3 + x_4 = 10$. Daher gilt $|L_1| = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$.

Genauso entspricht jeder Lösung der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ mit $x_i \geq 0$ aus $L_1 \cap L_2$ der Lösung der Gleichung $(x_1 - 8) + (x_2 - 8) + x_3 + x_4 = 2$. Daher ist $|L_1 \cap L_2| = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$. Die gleichen Überlegungen gelten für die anderen Kombinationen aus Schnitten zweier Mengen L_i . Da der Schnitt dreier Mengen L_i und der Schnitt aller vier Mengen L_i leer ist, ergibt sich für die gesuchte Anzahl

$$1330 - 4 \cdot \binom{13}{10} + 6 \cdot \binom{5}{2} - 0 + 0 = 246.$$

Aufgabe 5.1:

(a) Grenzwert 1

(b) Grenzwert 0,3719283225

(c) Kein Grenzwert, sondern zwei Häufungspunkte bei 0,479427 bzw. 0,823603

Aufgabe 5.2:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/2^n}{1 + 1/2^n} = 1$$

(b) Der Ausdruck wird durch n gekürzt und ergibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 2/n) \cdot (3 \cdot n + 4/n)}{n + 1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 2/n) \cdot (3 + 4/n^2)}{1 + 1/n^2} = 3$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(\frac{n+2 - (n+1)}{(n+1) \cdot (n+2)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 3/n + 2/n^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3:

Es sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $n_0 \in \mathbf{N}$ so, dass $n_0 \geq \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$ gilt. Dann ist insbesondere

$n_0 \geq \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1 > \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right\rceil \geq \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt nun $|a_n - 1| < \varepsilon$, denn

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n-1-(n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-2}{n+1} \right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n_0+1} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon} - 1 + 1} = \varepsilon.$$

Ab $n = 19999$ ist $|a_n - 1| \leq 10^{-4}$.

Aufgabe 5.4:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+3) \cdot (i+5)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+3) \cdot (i+5)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{9}{20} - \left(\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} \right) \right) \\
 &= \frac{9}{40} = 0,225
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot (i+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i+1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2+3 \cdot 4^i}{5^i} = \lim_{n \leftarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2+3 \cdot 4^i}{5^i} = \lim_{n \leftarrow \infty} s_n \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_{i=1}^n \frac{2+3 \cdot 4^i}{5^i}.$$

Zu beachten ist, dass hier der Summationsindex an der Untergrenze bei $i = 1$ beginnt. Es gilt

$$s_n = 2 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{5} \right)^i + 3 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{5} \right)^i = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) + 3 \cdot 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{5} \right)^n \right), \text{ also } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 12,5.$$

$$\text{(d)} \quad \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (i+2) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n i \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i = 2 + 4 = 6$$

Aufgabe 5.5:

$$\text{(a)} \quad \text{Nach dem Quotientenkriterium (Satz 5.1-11 (ii)) ist nachzuweisen, dass ab einem Index } n_0 \in \mathbf{N} \text{ stets } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \text{ für einen Wert } q \text{ mit } 0 < q < 1 \text{ gilt.}$$

$$\text{Hier ist } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^2.$$

$$\text{Da } n \cdot (n+2) = n^2 + 2 \cdot n < n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2 \text{ und damit } \frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n} \text{ ist, d.h. die}$$

$$\text{Folge } \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right)_{n \geq 1} \text{ monoton fällt, gibt es einen Wert } q \text{ mit } 0 < q < 1 \text{ und } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \text{ ab}$$

einem Index $n_0 \in \mathbf{N}$ (es ist $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 < 0,89$, d.h. das Verfahren funktioniert mit

$q = 0,89$ ab $n_0 = 3$), so dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2}{2^i}$ konvergiert.

$$(b) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{i!} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} = 2 \cdot \exp(2) = 2 \cdot e^2.$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{i!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot i - 1)} &= \frac{i! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2i)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot i - 1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2i)} \\ &= \frac{2 \cdot (i!)^2}{(2 \cdot i)!} \\ &= 2 \cdot \frac{i!}{i!} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot i}{(i+1) \cdot (i+2) \cdot (i+3) \cdot \dots \cdot (i+i)}. \end{aligned}$$

Für $1 \leq k \leq i$ folgt nacheinander: $\frac{k}{2} \leq \frac{i}{2}$, $k \leq \frac{i}{2} + \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \cdot (k+i)$, $\frac{k}{k+i} \leq \frac{1}{2}$. Damit ist

der letzte Bruch $< 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$. Nach dem Majorantenkriterium (Satz 5.1-11 (i)) konvergiert

daher $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot i - 1)}$, da $\sum_{i=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$ konvergiert.

Aufgabe 5.6:

Für $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ gilt bei $n = 11, n = 12, \dots, n = 30$ die Abschätzung $3 < a_n \leq 4$.

In der Literatur findet man für a_n die Abschätzung $\ln(n) < a_n < \ln(n) + 1$, d.h. $a_n \approx \ln(n)$.

Für $n > e^{20} \approx 4,851652 \cdot 10^8$ gilt $a_n > 20$.

Aufgabe 5.7:

Der gesuchte maximalen Definitionsbereich werde jeweils mit X bezeichnet.

(a) Es muss $9 - x^2 \geq 0$ gelten. Das ergibt $X = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$.

- (b) Es muss $x^2 - 9 \geq 0$ gelten. Das ergibt $X =]-\infty, -3] \cup [3, \infty[$.
- (c) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ ist für $x = 0$ nicht definiert, also $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
- (d) Es muss $x \cdot (x^2 - 1) \neq 0$ gelten. Daher ist $X = \mathbf{R} \setminus \{0, -1, 1\}$.
- (e) Es muss $|x| - x \geq 0$ gelten. Für $x \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ ist $|x| - x = x - x = 0 \geq 0$. Für $x \in \mathbf{R}_{<0}$ ist $|x| - x = -x - x = -2x > 0$. Daher gilt $X = \mathbf{R}$.
- (f) Es muss $x - |x| \geq 0$ gelten. Für $x \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ ist $x - |x| = x - x = 0 \geq 0$. Für $x \in \mathbf{R}_{<0}$ ist $x - |x| = x + x = 2x < 0$. Daher gilt $X = \mathbf{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 5.8:

Es ist $f(x) = x^2 - 2 \cdot x + 2 = (x-1)^2 + 1$. Der Graph der Funktion ist die um 1 nach oben und um 1 nach rechts verschobene Normalparabel. Die Funktion besitzt genau dann eine Umkehrfunktion, wenn $a = 1$ und $b = 1$ gilt.

Aufgabe 5.9:

Es seien $x_1 \in [0, 4]$ und $x_2 \in [0, 4]$ mit $x_1 < x_2$. Dann ist $4 - x_2 > 4 - x_1$ und damit $f(x_2) = \sqrt{4 - x_2} > \sqrt{4 - x_1} = f(x_1)$. Die Funktion ist also im Intervall $[0, 4]$ streng monoton fallend.

Wäre f in $[0, 4]$ konvex, so müsste für jedes $x_1 \in [0, 4]$ und $x_2 \in [0, 4]$ mit $x_1 \neq x_2$ und jedes $l \in \mathbf{R}$ mit $0 < l < 1$ gelten:

$$f(l \cdot x_1 + (1-l) \cdot x_2) \leq l \cdot f(x_1) + (1-l) \cdot f(x_2) \text{ bzw.}$$

$$\sqrt{4 - (l \cdot x_1 + (1-l) \cdot x_2)} \leq l \cdot \sqrt{4 - x_1} + (1-l) \cdot \sqrt{4 - x_2}$$

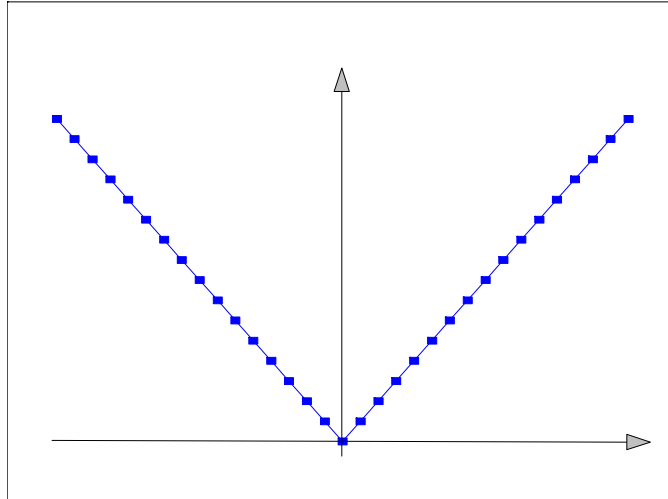
Für $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ und $l = 1/2$ ist aber

$$\sqrt{4 - 1/2 \cdot 4} = \sqrt{2} \text{ und } 1/2 \cdot \sqrt{4} + 1/2 \cdot \sqrt{4 - 4} = 1, \sqrt{2} > 1, \text{ d.h. } f \text{ ist in } [0, 4] \text{ nicht konvex.}$$

Aufgabe 5.10:

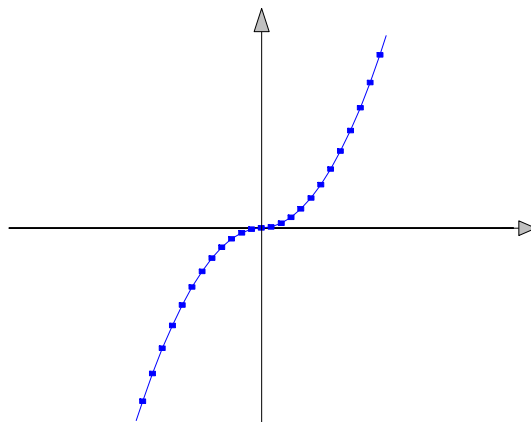
(a)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



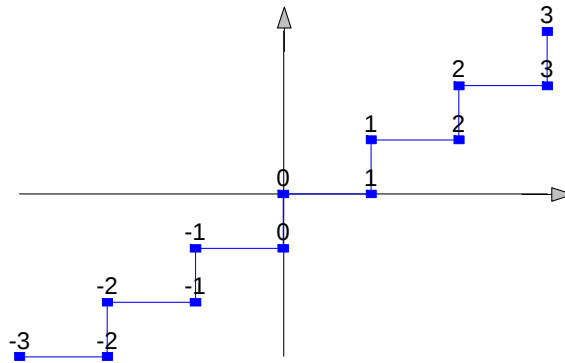
(b)

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

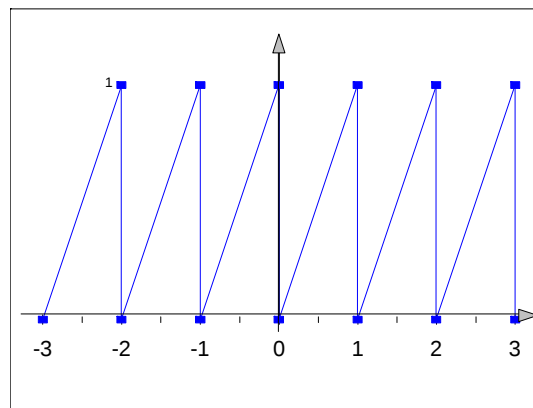


(c)

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist der ganzzahlige Anteil von x .



(d) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ ist der gebrochene Anteil von x .



Aufgabe 5.11:

Es bezeichne $\mathbf{F}(f)$ die Fixpunktmenge der Funktion f , d.h. $c \in \mathbf{F}(f)$, wenn $f(c) = c$ gilt.

(a) $f(c) = 3 \cdot c + 8 = c$ ist gleichbedeutend mit $c = -4$, d.h. $\mathbf{F}(f) = \{-4\}$

(b) $\mathbf{F}(f) = \{c \mid |c| = c\} = \{c \mid c \geq 0\}$.

- (c) Ein Fixpunkt der Länge 3 hat die Form $c = z_1 z_2 z_3$ mit $f(c) = z_3 z_2 z_1 = z_1 z_2 z_3$. Daher ist die Menge der Fixpunkte der Länge 3 gleich $\{c \mid c = xax \text{ mit } x \in \mathbf{A} \text{ und } a \in \mathbf{A}\}$.

Entsprechend ist die Menge der Fixpunkte der Länge 4 gleich

$\{c \mid c = x_1 x_2 x_3 x_4 = x_4 x_3 x_2 x_1 \text{ mit } x_i \in \mathbf{A}\}$, d.h. $c = x_1 x_2 x_3 x_4$ ist Fixpunkt der Länge 4, wenn $x_1 = x_4$ und $x_2 = x_3$ gilt, z.B. OTTO und ANNA sind Fixpunkte der Länge 4.

Die Menge der Fixpunkte der Länge $2 \cdot k$ ist gleich der Menge der Zeichenketten der Länge $2 \cdot k$, die vorwärts und rückwärts gelesen gleichlauten.

Die Menge der Fixpunkte der Länge $2 \cdot k + 1$ ist gleich

$$\{c \mid c = uau^R \text{ und } a \in \mathbf{A} \text{ und } u \in \mathbf{A}^* \text{ und Länge von } u = k\}.$$

Hierbei bezeichnet u^R das Wort, das aus der umgekehrten Buchstabenfolge von u besteht.

Aufgabe 5.12:

- (a) $p(x) = x^5 - 13 \cdot x^3 + 36 \cdot x = x \cdot (x^4 - 13 \cdot x^2 + 36)$, d.h. eine Nullstelle ist $x_{01} = 0$.

Es ist $x^4 - 13 \cdot x^2 + 36 = z^2 - 13 \cdot z + 36$ mit $z = x^2$. Aus $z^2 - 13 \cdot z + 36 = 0$ folgt

$$z_{01,02} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36}, \text{ d.h. } z_{01} = 9 \text{ und } z_{02} = 4. \text{ Die Nullstellen von } p \text{ sind also}$$

$$x_{01} = 0, x_{02} = 3, x_{03} = -3, x_{04} = 2, x_{05} = -2.$$

Eine andere Lösungsmöglichkeit versucht zunächst durch Probieren eine Nullstelle von $x^4 - 13 \cdot x^2 + 36$ zu ermitteln. Man findet leicht $x_{04} = 2$. Dann wird $x^4 - 13 \cdot x^2 + 36$ durch $x - 2$ dividiert: $(x^4 - 13 \cdot x^2 + 36) : (x - 2) = x^3 + 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 18$. Der Lösungshinweis in der Aufgabenstellung lässt eine Nullstelle bei $x_{02} = 3$ vermuten. Also kann man $x^3 + 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 18$ durch $x - 3$ dividieren: $(x^3 + 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 18) : (x - 3) = x^2 + 5 \cdot x + 6$. Offensichtlich ist $x^2 + 5 \cdot x + 6 = (x + 3) \cdot (x + 2)$. Das liefert die restlichen Nullstellen $x_{03} = -3$ und $x_{05} = -2$.

- (b) Die Nullstellen lauten $x_{01} = 0$, $x_{02} = 5$ und $x_{03} = 3$.

- (c) Setzt man $z = x^2$, so erhält man $p(x) = 3 \cdot x^4 - 11 \cdot x^2 - 4 = 3 \cdot z^2 - 11 \cdot z - 4$. Die Nullstel-

len in z lauten $z_{01,02} = \frac{11}{6} \pm \sqrt{\frac{121}{36} + 4}$, d.h. $z_{01,02} = \frac{11}{6} \pm \frac{13}{6}$. In x lauten die Nullstellen daher $x_{01,02} = \pm \sqrt{\frac{24}{6}} = \pm 2$. Weitere reelle Nullstellen gibt es nicht, da $z_{02} = -\frac{1}{3} < 0$ ist.

- (d) Aus $x^n - 1 = 0$ folgt für die Nullstellen $x_0 = \sqrt[n]{1}$. Als reelle Nullstellen kommen höchstens die Zahlen $+1$ und -1 in Frage. Es ist
- $$x^n - 1 = (x - 1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^2 + x + 1).$$

1. Fall: n ist ungerade.

Dann ist $n - 1$ gerade. Setzt man -1 in

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^2 + x + 1 = (x^{n-1} + x^{n-2}) + (x^{n-3} + x^{n-4}) + \dots + (x^2 + x) + 1$$

ein, so sieht man, dass sich jeweils zwei aufeinanderfolgende Potenzen aufheben und dass der Summand 1 übrig bleibt (die Summe enthält $n - 1 + 1 = n$ viele Summanden). Daher ist -1 keine Nullstelle von $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^2 + x + 1$: Es gibt nur die reelle Nullstelle 1 .

2. Fall: n ist gerade.

Dann ist $n - 1$ ungerade. Setzt man -1 in

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^2 + x + 1 = (x^{n-1} + x^{n-2}) + (x^{n-3} + x^{n-4}) + \dots + (x + 1)$$

ein,

so sieht man, dass sich jeweils zwei aufeinanderfolgende Potenzen aufheben. Daher ist -1 Nullstelle von $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^2 + x + 1$: Es gibt die reellen Nullstellen $+1$ und -1 .

Aufgabe 5.13:

- (a) Man findet eine Nullstelle des Zählerpolynoms $x^3 - 3 \cdot x^2 - x + 3$ (z.B. durch Probieren) bei $x_{01} = 3$. Man dividiert das Zählerpolynom durch $x - 3$ und erhält

$$(x^3 - 3 \cdot x^2 - x + 3) : (x - 3) = x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1).$$

Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind also $x_{01} = 3$, $x_{02} = 1$ und $x_{03} = -1$.

Das Nennerpolynom $x^2 + x - 2$ hat die Nullstellen $x_{04} = 1$ und $x_{05} = -2$.

Der Definitionsbereich von f lautet also $X = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Die Nullstellen von f liegen bei $x_{01} = 3$ und $x_{03} = -1$. Bei $x_{05} = -2$ hat f eine Polstelle. Bei $x_{02} = 1$ liegt eine behebbare Unstetigkeitsstelle mit

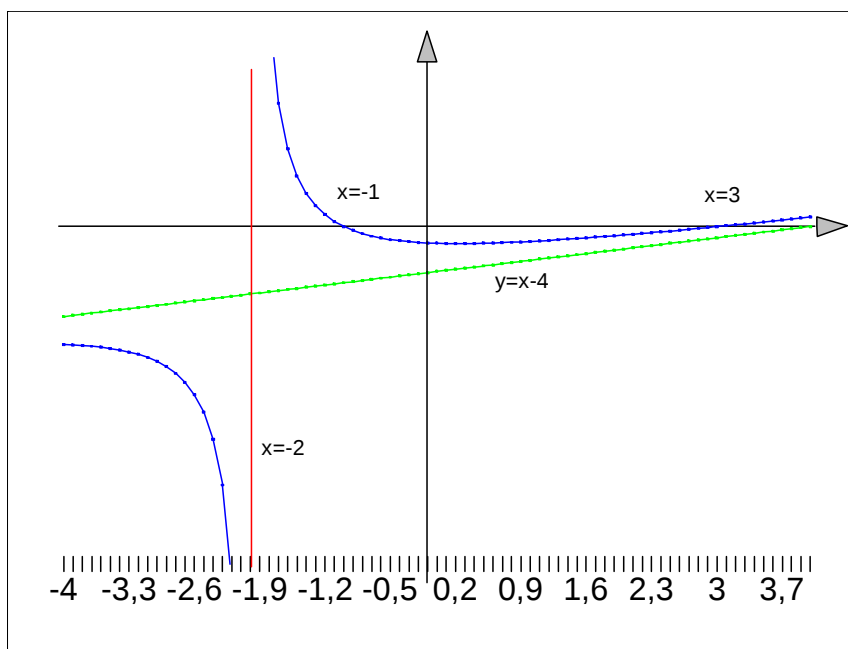
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3) \cdot (x+1)}{x+2} = -\frac{4}{3}.$$

Die Polynomdivision $(x^3 - 3 \cdot x^2 - x + 3) : (x^2 + x - 2)$ ergibt

$$(x^3 - 3 \cdot x^2 - x + 3) : (x^2 + x - 2) = x - 4 + \frac{5 \cdot x - 5}{x^2 + x - 2}.$$

Für $x \rightarrow \pm\infty$ hat f also die Asymptote $s(x) = x - 4$.

Skizze:



- (b) Das Zählerpolynom $3 \cdot x^5 - 11 \cdot x^3 - 4x$ hat die Nullstellen $x_{01} = 0$, $x_{02} = 2$ und $x_{03} = -2$, denn $3 \cdot x^5 - 11 \cdot x^3 - 4x = x \cdot (3 \cdot x^4 - 11 \cdot x^2 - 4) = x \cdot (3 \cdot z^2 - 11 \cdot z - 4)$ mit $z = x^2$ liefert die Nullstellen in z : $z_{01,02} = \frac{11}{6} \pm \frac{13}{6}$ und in x : $x_{02,03} = \sqrt{\frac{11}{6} + \frac{13}{6}} = \pm 2$.

Das Nennerpolynom $2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 2$ hat die Nullstellen $x_{04} = -2$ und $x_{05} = \frac{1}{2}$.

Der Definitionsbereich von f lautet also $X = \mathbf{R} \setminus \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\}$.

Die Nullstellen von f liegen bei $x_{01} = 0$ und $x_{02} = 2$. Bei $x_{03} = \frac{1}{2}$ hat f eine Polstelle. Bei $x_{04} = -2$ liegt eine behebbare Unstetigkeitsstelle mit

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x \cdot (x-2) \cdot (x+2) \cdot (3x^2+1)}{(x+2) \cdot (2 \cdot x - 1)} = -20,8.$$

Die Polynomdivision $(3 \cdot x^5 - 11 \cdot x^3 - 4 \cdot x) : (2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 2)$ ergibt

$$(3 \cdot x^5 - 11 \cdot x^3 - 4 \cdot x) : (2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 2) = \frac{3}{2} \cdot x^3 - \frac{9}{4} \cdot x^2 - \frac{5}{8} \cdot x - \frac{21}{16} - \frac{21/16 \cdot x + 21/8}{2x^2 + 3 \cdot x - 2}. \quad \text{Für}$$

$$x \rightarrow \pm \infty \text{ hat } f \text{ also die Asymptote } s(x) = \frac{3}{2} \cdot x^3 - \frac{9}{4} \cdot x^2 - \frac{5}{8} \cdot x - \frac{21}{16}.$$

Skizze: ...

- (c) Das Zählerpolynom $x^2 - 4$ hat die Nullstellen $x_{01} = 2$ und $x_{02} = -2$. Das Nennerpolynom $x^4 - 3 \cdot x^2 - 4 = z^2 - 3 \cdot z - 4 = (z+1) \cdot (z-4) = (x^2+1) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$ hat die reellen Nullstellen $x_{03} = 2$ und $x_{04} = -2$.

Der Definitionsbereich von f lautet also $X = \mathbf{R} \setminus \{ -2, 2 \}$.

f hat keine Nullstellen und keine Polstellen. Bei $x_{01} = 2$ und $x_{02} = -2$ liegen behebbare

Unstetigkeitsstellen mit $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{5}$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{1}{5}$. Es gilt $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$.

Skizze: ...

Aufgabe 5.14:

- (a) Die Funktion $f(x) = \frac{x}{1-x}$ hat bei 1 einen Pol, da 1 Nullstelle des Nennerpolynoms, aber nicht des Zählerpolynoms ist. Daher gilt $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x}{1-x} \right| = \infty$, genauer: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{1-x} = -\infty$

$$\text{und } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{1-x} = +\infty.$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot \sqrt{2-x}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}{(x-1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)} = \frac{m}{n}$$

Aufgabe 5.15:

f ist bei $-\frac{1}{2}$ stetig, wenn der Graph an dieser Stelle keinen „Sprung“ macht, d.h. wenn

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1/2 \\ x \leq -1/2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1/2 \\ x > -1/2}} f(x) = -\frac{11}{4} \text{ gilt. Für den ersten Limes } \lim_{\substack{x \rightarrow -1/2 \\ x \leq -1/2}} f(x) \text{ gilt nach Definition von}$$

f :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1/2 \\ x \leq -1/2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1/2 \\ x \leq -1/2}} (-x^2 - x - 3) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{11}{4}.$$

Die Konstante a muss so gewählt werden, dass auch bei $x = 1$ kein „Sprung“ entsteht, d.h. dass

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - 2x + a) = -\frac{11}{4}$$

$$\text{gilt, also } 1 - 2 + a = -\frac{11}{4} \text{ bzw. } a = -1,75.$$

Aufgabe 5.16:

$$(a) \quad \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{(x+1)^2}{x^2} = \frac{x^2 + 2 \cdot x + 1}{x^2} = 1 + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right),$$

$$\frac{f(2 \cdot x)}{f(x)} = \frac{(2 \cdot x)^2}{x^2} = 4.$$

$$(b) \quad \frac{g(x+1)}{g(x)} = \frac{2^{x+1}}{2^x} = 2,$$

$$\frac{g(2x)}{g(x)} = \frac{2^{2x}}{2^x} = \frac{2^x \cdot 2^x}{2^x} = 2^x = g(x).$$

- (c) Ergebnis in (a): $f(x+1) = \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot f(x)$, d.h. bei Vergrößerung des Argumentwerts x um 1 wächst f nur langsam, insbesondere bei sehr großen Werten von x . Trotzdem vervierfacht sich der Funktionswert bei Verdoppelung des Argumentwerts.

Ergebnis in (b): $g(x+1) = 2 \cdot g(x)$ zeigt, dass sich der Funktionswert jedesmal verdoppelt, wenn x um 1 wächst (schnelles, exponentielles Wachstum der Funktion g). Das schnelle Wachstum zeigt sich insbesondere in der Gleichung $g(2x) = (g(x))^2$, d.h. bei Verdoppelung des Arguments wird der Funktionswert quadriert.

Aufgabe 5.17:

langames Wachstum $\longrightarrow$ schnelles Wachstum

- (a) $f_3(n) = (\log_2(n))^5 \longrightarrow f_2(n) = n^2 \longrightarrow f_1(n) = n^3 \longrightarrow f_4(n) = \frac{n^4}{\log_2(n)}$
- (b) $f_1(n) = (\log_2(n))^2 \longrightarrow f_3(n) = n \longrightarrow f_4(n) = n \cdot (\log_2(n))^3 \longrightarrow f_2(n) = \frac{n^2}{\log_2(n)}$

Aufgabe 5.18:

- (a) $f'(x) = -\frac{2 \cdot x + 3}{(x+3)^4}$
- (b) $f'(x) = \frac{6 \cdot (x^4 - 2 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 10)}{(3 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5)^2}$
- (c) $f'(x) = e^x \cdot \ln(x) + e^x \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x} (x \cdot \ln(x) + 1)$
- (d) $f(x) = (\sqrt{x} + 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$
 $f'(x) = \frac{-\sqrt{x} - (1-x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$$(e) \quad f'(x) = -\frac{2}{(1 + \ln(x))^2 \cdot x}$$

$$(f) \quad f(x) = 2^{h(x)} \quad \text{mit } h(x) = 3^x$$

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln(3) \cdot 2^{(3^x)} \cdot \ln(2) = \ln(2) \cdot \ln(3) \cdot 3^x \cdot 2^{(3^x)}$$

Aufgabe 5.19:

$$p(x) = (x - x_0)^2 \cdot p_1(x) \quad \text{mit } p_1(x_0) \neq 0,$$

$$p'(x) = 2 \cdot (x - x_0) \cdot p_1(x) + (x - x_0)^2 \cdot p_1'(x),$$

$$p''(x) = 2 \cdot p_1(x) + 2 \cdot (x - x_0) \cdot p_1'(x) + 2 \cdot (x - x_0) \cdot p_1'(x) + (x - x_0)^2 \cdot p_1''(x).$$

Es gilt $p'(x_0) = 0$ und $p''(x_0) = 2 \cdot p_1(x_0) \neq 0$. Also hat p an der Stelle x_0 einen Extremwert.

Aufgabe 5.20:

$$p(x) = x^m \cdot (x^2 - 1) = x^{m+2} - x^m,$$

$$p^{(i)}(x) = (m+2) \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (m+2-i+1) \cdot x^{m+2-i} - m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-i+1) \cdot x^{m-i} \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

$$p^{(i)}(0) = 0 \quad \text{für } i < m,$$

$$p^{(m)}(0) = p^{(m)}(x)|_{x=0} = (m+2) \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (3) \cdot x^2|_{x=0} - m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (1) = -m! < 0$$

(zum ersten Mal $\neq 0$),

$$p^{(m+1)}(0) = 0,$$

$$p^{(m+2)}(0) = p^{(m+2)}(x)|_{x=0} = (m+2) \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (1) = (m+2)!$$

$$p^{(i)}(0) = 0 \quad \text{für } i > m+2.$$

Für gerades m hat p bei $x = 0$ einen Extremwert; es handelt sich wegen $p^{(m)}(0) < 0$ um ein Maximum. Für ungerades m hat p bei $x = 0$ einen Wendepunkt.

Aufgabe 5.21:

(a) Der Absatz ist zu dem Zeitpunkt maximal, an dem f ein Maximum annimmt:

$$f'(t) = 2 \cdot t \cdot e^{-2t} + t^2 \cdot e^{-2t} \cdot (-2) = 2 \cdot e^{-2t} \cdot (t - t^2),$$

$$f''(t) = 2 \cdot e^{-2t} \cdot (-2) \cdot (t - t^2) + 2 \cdot e^{-2t} \cdot (1 - 2 \cdot t) = 2 \cdot e^{-2t} \cdot (2 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 1).$$

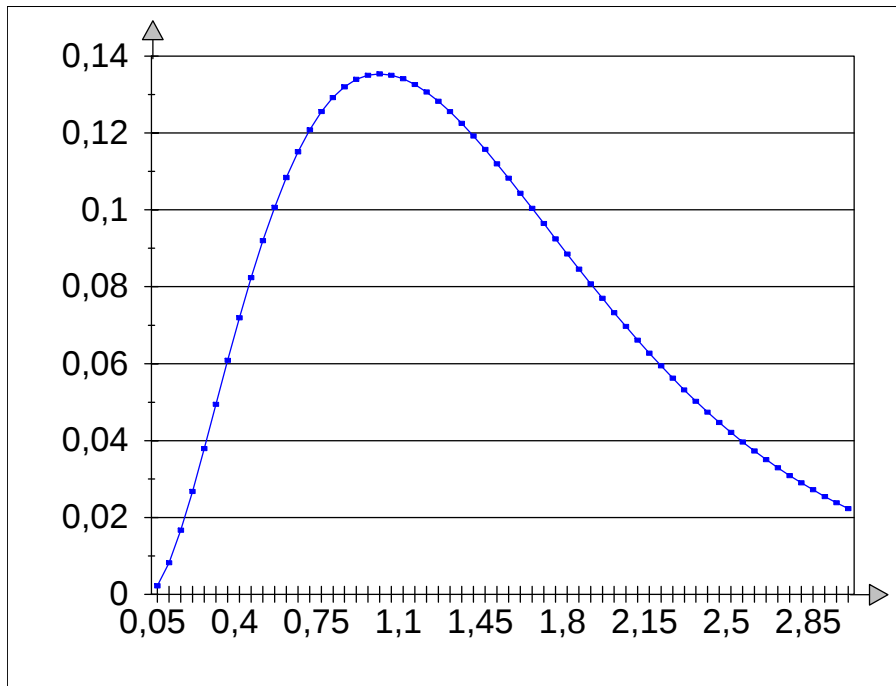
Die erste Ableitung wird $= 0$ gesetzt. Das ergibt $2 \cdot e^{-2t} \cdot (t - t^2) = 0$ und wegen $e^{-2t} \neq 0$ die beiden Lösungen $t_{01} = 0$ und $t_{02} = 1$. Die erste Lösung liegt nicht im Definitionsbereich von f , also kommt für ein Maximum höchstens die zweite Lösung in Betracht.

$f''(t_{02}) = f''(1) = -2 \cdot e^{-2} < 0$, also liegt bei $t_{02} = 1$ wirklich ein Maximum vor mit dem Wert $f(1) = e^{-2}$.

- (b) Der Absatz nimmt zu, wenn $f'(t) > 0$ ist, und fällt in dem Bereich, in dem $f'(t) < 0$ gilt. Es ist $f'(t) > 0$ genau dann, wenn $t - t^2 > 0$ ist, d.h. wegen $t > 0$, wenn $t < 1$ gilt. Entsprechend ist $f'(t) < 0$ für $t > 1$.
- (c) Der Absatz steigt am schnellsten, wenn die Absatzsteigerung $f'(t)$ maximal ist, d.h. wenn $f''(t) = 0$ und $f'''(t) \neq 0$ gilt. $f''(t) = 0$ liefert wegen $e^{-2t} \neq 0$ die Gleichung $2t^2 - 4t + 1 = 0$ mit den Lösungen $t_{01,02} = 1 \pm \sqrt{1 - 1/2}$, d.h. $t_{01} = 0,293$ und $t_{02} = 1,707$. Es gilt $f'''(t_{01}) \neq 0$, also liegt hier tatsächlich ein Wendepunkt von f vor. Der Absatz steigt am schnellsten zum Zeitpunkt $t_{01} = 0,293$; im Bereich $t > 1$ fällt der Absatz, und zwar am schnellsten zum Zeitpunkt $t_{02} = 1,707$.
- (d) f ist konvex in I , wenn $f''(t) \geq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $2t^2 - 4t + 1 \geq 0$ ist (hier wird wieder $e^{-2t} \neq 0$ genutzt). Umformungen dieser Gleichung ergeben nacheinander $t^2 - 2 \cdot t + \frac{1}{2} \geq 0$, $t^2 - 2 \cdot t + 1 - 1 + \frac{1}{2} \geq 0$ und $(t-1)^2 \geq \frac{1}{2}$. Daher gilt $0 < t < 1 - \sqrt{1/2}$ oder $t > 1 + \sqrt{1/2}$.

f ist konvex in $]0, 1 - \sqrt{1/2}[\cup]1 + \sqrt{1/2}, \infty[$ und konkav in $[1 - \sqrt{1/2}, 1 + \sqrt{1/2}]$.

(e)

**Aufgabe 5.22:**

Bezüglich $mqa(S) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - S)^2$ sind die Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ Konstanten. Daher ist

$$mqa'(S) = \frac{d mqa(S)}{dS} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 2 \cdot (x_i - S) \cdot (-1). \text{ Die Ableitung wird auf 0 gesetzt und nach } S$$

aufgelöst und ergibt nacheinander $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 2 \cdot (x_i - S) \cdot (-1) = 0$, $\sum_{i=1}^n (x_i - S) = 0$, $n \cdot S = \sum_{i=1}^n x_i$

und $S = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$. daher ist $\bar{s}$ gerade der Mittelwert der Beobachtungen $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dass

tatsächlich ein Minimum vorliegt, sieht man an $mqa''(S) = -\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (-1) = 2 > 0$.

Aufgabe 5.23:

(a) Fall „0/0“:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot x^4 - 6 \cdot x^2 + 3}{4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12 \cdot x^3 - 12 \cdot x}{12 \cdot x^2 - 12 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{36 \cdot x^2 - 12}{24 \cdot x - 12} = \frac{24}{12} = 2$$

(b) Fall „0/0“:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \ln(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{1 - \frac{1}{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x}) \cdot (x+1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} \cdot (x+1)) + (e^x - e^{-x}) \cdot 1}{1} = 2\end{aligned}$$

(c) Fall „0/0“:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m \cdot x^{m-1}}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{m}{n}$$

(d) Fall „0/0“:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1$$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln(1 - \sqrt{x}) - \ln(1 - x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (-h(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (g(x) - h(x))$ mit

$h(x) = -\ln(1 - \sqrt{x})$ und $g(x) = -\ln(1 - x)$. Jetzt liegt der Fall „ $\infty - \infty$ “ vor. Exponentieren führt auf den Fall „0/0“:

$$e^{g(x)-h(x)} = \frac{e^{g(x)}}{e^{h(x)}} = \frac{1/e^{h(x)}}{1/e^{g(x)}} = \frac{1/e^{-\ln(1-\sqrt{x})}}{1/e^{-\ln(1-x)}} = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{-1} = \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln(1 - \sqrt{x}) - \ln(1 - x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(e^{g(x)-h(x)}) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 1} (e^{g(x)-h(x)})\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,6931471$$

Aufgabe 5.24:

Zunächst ist das Erfülltsein der Bedingungen im Newton-Verfahren zu überprüfen.

Für $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ ist $p'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ und $p''(x) = 6x - 2$.

Wir wählen das Intervall $I = [a, b]$ mit $a = 1,5$ und $b = 2$.

Bedingung (1): In I wechselt das Vorzeichen von p : $p(1,5) = -1,375$ und $p(2) = 1$.

Bedingung (2): Die Nullstellen von p' sind $x_{01} = 1$ und $x_{02} = -\frac{1}{3}$, liegen also nicht in I .

Bedingung (3): Da $p''(x) = 6 \cdot x - 2$ monoton steigt und $p''(1,5) = 9$ und $p''(2) = 10$ sind, gilt $p''(x) > 0$ für jedes $x \in I$.

Bedingung (4): $p'(a) = p'(1,5) = 2,75$ und $p'(b) = p'(2) = 7$. Mit $c = 1,5$ gilt

$$\left| \frac{p(c)}{p'(c)} \right| = \frac{1,375}{2,75} = 0,5 \leq b - a.$$

Wir wählen $a_0 = 1,75$, $a_{n+1} = a_n - \frac{p(a_n)}{p'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^3 - a_n^2 - a_n - 1}{3 \cdot a_n^2 - 2 \cdot a_n - 1}$.

Die folgende Tabelle zeigt 18 Iterationsschritte dieses Verfahrens (mit einem Tabellenkalkulationsprogramm). Man sieht, dass bereits nach 4 Iterationsschritten keine Änderung in der 13. Dezimalstelle nach dem Komma (gerundet) auftritt. Die dritte Spalte zeigt, dass der Funktionswert „sehr dicht“ bei 0 liegt: die Abweichung ist kleiner als 10^{-15} . Mit der vom Tabellenkalkulationsprogramm bereitgestellten „Berechnen-für“-Funktion erhält man nach 100 Iterationen $x_0 = 1,8392859993692$ und $f(x_0) = 4,135E-06$, also ein wesentlich schlechteres Ergebnis.

n	a_n	$f(a_n)$
0	1,75	-0,453125
1	1,8466666666667	0,0406172
2	1,8393313374055	0,0002439
3	1,8392867568556	8,979E-09
4	1,8392867552142	2,828E-16
5	1,8392867552142	2,828E-16
6	1,8392867552142	2,828E-16
7	1,8392867552142	2,828E-16
8	1,8392867552142	2,828E-16
9	1,8392867552142	2,828E-16
10	1,8392867552142	2,828E-16
11	1,8392867552142	2,828E-16
12	1,8392867552142	2,828E-16
13	1,8392867552142	2,828E-16
14	1,8392867552142	2,828E-16
15	1,8392867552142	2,828E-16
16	1,8392867552142	2,828E-16
17	1,8392867552142	2,828E-16
18	1,8392867552142	2,828E-16

Aufgabe 5.25:

Die Approximationsfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lautet $a_0 = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{\pi}{a_n} \right)$. Die folgende

Tabelle zeigt das Verfahren nach 6 Iterationen:

n	a_n	$f(a_n)$
0	1,57	-0,67669265358979
1	1,785507214519	0,046443359509757
2	1,772501565723	0,00016914690060625
3	1,7724538515477	2,276642576066E-09
4	1,7724538509055	2,7170106442487E-16
5	1,7724538509055	2,7170106442487E-16
6	1,7724538509055	2,7170106442487E-16

Mit der vom Tabellenkalkulationsprogramm bereitgestellten „Berechnen-für“-Funktion erhält man nach 100 Iterationen $x_0 = 1,772455878664$ und $f(x_0) = 7,188E - 06$, also wieder ein wesentlich schlechteres Ergebnis.

Aufgabe 5.26:

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = \sqrt{1+x}, & x_0 = 0 & f(0) = 1 \\
 f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-1/2} & & f'(0) = \frac{1}{2} \\
 f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-3/2} & & f''(0) = -\frac{1}{4} \\
 f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot (1+x)^{-5/2} & & f'''(0) = \frac{3}{8}
 \end{array}$$

Das Taylorpolynom 3. Ordnung für $f(x) = \sqrt{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ lautet:

$$\begin{aligned}
 T_3(x) &= \sum_{i=0}^3 \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i \Big|_{x_0=0} \\
 &= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 \\
 &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{0,5} = f(-0,5), \text{ also } \sqrt{0,5} \approx T_3(-0,5) = 0,7109375$$

$$\text{Bemerkung: } \sqrt{0,5} = 0,7071067812, \text{ d.h. } \left| \sqrt{0,5} - T_3(-0,5) \right| = 0,0038307188 < 0,004.$$

Aufgabe 5.27:

Man kann die gesuchten Werte a_0, a_1, a_2, a_3 und a_4 als Koeffizienten des Taylorpolynoms von p an der Stelle $x_0 = 3$ bestimmen:

$$\begin{array}{ll} p(x) = x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1 & p(3) = 5 \\ p'(x) = 4 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 2 & p'(3) = 29 \\ p''(x) = 12 \cdot x^2 - 18 \cdot x & p''(3) = 54 \\ p'''(x) = 24 \cdot x - 18 & p'''(3) = 54 \\ p^{(4)}(x) = 24 & p^{(4)}(3) = 24 \end{array}$$

Daher ist $T_4(x) = p(3) + p'(3) \cdot (x-3) + \frac{p''(3)}{2} \cdot (x-3)^2 + \frac{p'''(3)}{6} \cdot (x-3)^3 + \frac{p^{(4)}(3)}{24} \cdot (x-3)^4$. Da im vorliegenden Fall $T_4(x) = p(x)$ gilt, ist

$$p(x) = 5 + 29 \cdot (x-3) + 27 \cdot (x-3)^2 + 9 \cdot (x-3)^3 + (x-3)^4, \text{ d.h. } a_0 = 5, a_1 = 29, a_2 = 27, a_3 = 9 \text{ und } a_4 = 1.$$

Aufgabe 5.28:

Zunächst wird die durch $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ definierte Funktion um $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe entwickelt:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} & f(0) = 1 \\ f'(x) = \frac{(1-x)^3 + 3 \cdot (1+x) \cdot (1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{2 \cdot (2+x)}{(1-x)^4} & f'(0) = 4 \\ f''(x) = \frac{2 \cdot (1-x)^4 + 2 \cdot (2+x) \cdot 4 \cdot (1-x)^3}{(1-x)^8} = \frac{6 \cdot (3+x)}{(1-x)^5} & f''(0) = 18 \\ f'''(x) = \frac{6 \cdot (1-x)^5 + 5 \cdot 6 \cdot (3+x) \cdot (1-x)^4}{(1-x)^{10}} = \frac{24 \cdot (4+x)}{(1-x)^6} & f'''(0) = 96 \end{array}$$

„Vermutete“ Gesetzmäßigkeit (die sich z.B. durch vollständige Induktion beweisen lässt):

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n+1)!(n+1+x)}{(1-x)^{n+3}} \text{ für } n \geq 0.$$

Das n -te Taylorpolynom von f an der Stelle $x_0 = 0$ lautet also:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^n \frac{(i+1)!(i+1)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^n (i+1)^2 \cdot x^i = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 \cdot x^{i-1}.$$

Falls man für das Restglied $R_n(x)$ nachweisen kann, dass es mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert,

gilt sogar $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 x^{i-1}.$

$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)!(n+2+z)}{(1-z)^{n+4}} \cdot x^{n+1} = \frac{(n+2) \cdot (n+2+z)}{(1-z)^{n+4}} \cdot x^{n+1}.$ Hierbei ist z ein Wert zwischen 0 und x . Falls man $|x|$ „nicht zu groß“ wählt, konvergiert $R_n(x)$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 (wir brauchen $x = \frac{1}{2}$):

Es wird also $R_n(x)$ für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ untersucht:

Wegen $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ist $0 < z < x \leq \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(n+2) \cdot (n+2+z)}{(1-z)^{n+4}} \cdot x^{n+1} \\ &< \frac{(n+2) \cdot (n+2+x)}{(1-z)^{n+4}} \cdot x^{n+1} \\ &= \frac{(n+2)^2 \cdot x^{n+1} + (n+2) \cdot x^{n+2}}{(1-z)^{n+4}} \end{aligned}$$

Wir setzen $c = \frac{x}{1-z}$. Dann gilt $0 \leq c < 1$ und

$$\begin{aligned} R_n(x) &< \frac{(n+2)^2 \cdot x^{n+1} + (n+2) \cdot x^{n+2}}{(1-z)^{n+4}} \\ &\leq \frac{(n+2)^2}{(1-z)^3} \cdot c^{n+1} + \frac{n+2}{(1-z)^2} \cdot c^{n+2} \end{aligned}$$

Da die Potenzen c^{n+1} bzw. c^{n+2} schneller gegen 0 konvergieren als die Polynome $(n+2)^2$ bzw. $n+2$ gegen ∞ , gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$. Es ist also für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ in der Tat

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot x^{i-1} \quad (\text{man kann dies sogar für } |x| < 1 \text{ zeigen}).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+1/2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 12.$$

Aufgabe 5.29:

$f(x) = x^2 \cdot e^x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (2 \cdot x + x^2)$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = e^x \cdot (2 \cdot x + x^2) + e^x \cdot (2 + 2 \cdot x) = e^x \cdot (x^2 + 4 \cdot x + 2)$	$f''(0) = 2$
$f'''(x) = e^x \cdot (x^2 + 4 \cdot x + 2) + e^x \cdot (2 \cdot x + 4) = e^x \cdot (x^2 + 6 \cdot x + 6)$	$f'''(0) = 6$
$f^{(4)}(x) = e^x \cdot (x^2 + 6 \cdot x + 6) + e^x \cdot (2 \cdot x + 6) = e^x \cdot (x^2 + 8 \cdot x + 12)$	$f^{(4)}(0) = 12$
$f^{(5)}(x) = e^x \cdot (x^2 + 8 \cdot x + 12) + e^x \cdot (2 \cdot x + 8) = e^x \cdot (x^2 + 10 \cdot x + 20)$	$f^{(5)}(0) = 20$

Daher ist $T_5(x) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{6}$.

Einfachere Lösung: $f(x) = x^2 \cdot e^x = x^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$.

Also ist $T_5(x) = x^2 \cdot \sum_{i=0}^3 \frac{x^i}{i!} = x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{6}$.

Aufgabe 5.30:

- (a) Für $n=1$ steht links $F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3$ und rechts $F_4 = 3$. Die Behauptung gelte für $n \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 F_1 + F_3 + \dots + F_{2(n+1)+1} &= (F_1 + F_3 + \dots + F_{2n+1}) + F_{2n+3} \\
 &= F_{2n+2} + F_{2n+3} \quad \text{nach Induktionsannahme} \\
 &= F_{2n+4} \quad \text{nach Definition der Fibonacci - Zahlen} \\
 &= F_{2(n+1)+2},
 \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung auch für $n+1$.

- (b) Für $n=1$ steht links $F_1 = 1$ und rechts $F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$. Die Behauptung gelte für $n \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \dots + F_{n+1} &= (F_1 + F_2 + \dots + F_n) + F_{n+1} \\ &= F_{n+2} - 1 + F_{n+1} && \text{nach Induktionsannahme} \\ &= F_{n+3} - 1 && \text{nach Definition der Fibonacci - Zahlen} \\ &= F_{(n+1)+2} - 1, \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung auch für $n+1$.

- (c) Für $n=1$ gilt die Gleichung: $F_2 \cdot F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = (-1)^1$. Die Behauptung gelte für $n \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 &= (F_n + F_{n+1}) \cdot F_n - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1} \cdot F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1} \cdot F_n + F_{n+1} \cdot F_{n-1} - (-1)^n - F_{n+1}^2 && \text{nach Induktionsannahme} \\ &= F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n-1}) + (-1)^{n+1} - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} - F_{n+1}^2 && \text{nach Definition der Fibonacci - Zahlen} \\ &= (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung auch für $n+1$.

- (d) Die Formel $F_{n+k} = F_k \cdot F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n$ für $k \geq 1$ wird durch vollständige Induktion über k bewiesen. Für $k=1$ und $k=2$ stimmt die Behauptung. Sie gelte für $k \geq 2$ und den Vorgänger $k-1$. Das heißt:

$$F_{n+k} = F_k \cdot F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n \quad \text{und} \quad F_{n+k-1} = F_{k-1} \cdot F_{n+1} + F_{k-2} \cdot F_n.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} F_{n+k+1} &= F_{n+k} + F_{n+k-1} \\ &= (F_k \cdot F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n) + (F_{k-1} \cdot F_{n+1} + F_{k-2} \cdot F_n) && \text{nach Induktionsannahme} \\ &= (F_k + F_{k-1}) \cdot F_{n+1} + (F_{k-1} + F_{k-2}) \cdot F_n \\ &= F_{k+1} \cdot F_{n+1} + F_k \cdot F_n. \end{aligned}$$

(e) $F_0 = 0$ ist gerade.

Es wird gezeigt: Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ sind F_{3k} gerade und F_{3k-1} und F_{3k-2} ungerade.

Für $k=1$ stimmt die Behauptung, und sie gelte für $k \geq 1$. Dann sind $F_{3(k+1)-2} = F_{3k+1} = F_{3k-1} + F_{3k}$ und $F_{3(k+1)-1} = F_{3k+2} = F_{3k} + F_{3k+1}$ jeweils als Summe einer ungeraden und geraden Zahl ungerade, und $F_{3(k+1)} = F_{3(k+1)-2} + F_{3(k+1)-1}$ ist als Summe zweier ungerader Zahlen gerade.

(f) Es werden zwei „Richtungen“ der Aussage bewiesen:

1. Ist F_n durch 4 teilbar, dann ist n durch 6 teilbar.
2. Ist n durch 6 teilbar, dann ist F_n durch 4 teilbar.

Zu 1.: Ist F_n durch 4 teilbar, dann ist F_n gerade, und nach Aufgabe (e) ist n durch 3 teilbar. Nach Aufgabe (c) ist $F_n^2 = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - (-1)^n$. Da F_n^2 als eine durch 16 teilbare Zahl gerade ist und F_{n+1} und F_{n-1} ungerade sind und damit $F_{n+1} \cdot F_{n-1}$ ungerade ist, gilt $-(-1)^n = -1$. Damit ist n gerade. Also ist n durch 2 und durch 3 und damit durch 6 teilbar.

Zu 2.: Es wird gezeigt: Für $n = 6 \cdot k$ ist F_n durch 4 teilbar. Es ist $F_6 = 8$ durch 4 teilbar. Die Behauptung gelte für $k \geq 1$. Dann ist die Fibonacci-Zahl $F_{6(k+1)} = F_{6k+6} = F_6 \cdot F_{6k+1} + F_5 \cdot F_{6k} = 8 \cdot F_{6k+1} + 5 \cdot F_{6k}$ (hier wird das Ergebnis aus Aufgabe (d) verwendet) durch 4 teilbar, da nach Induktionsannahme F_{6k} durch 4 teilbar ist.

(g) Es wird folgende Aussage durch vollständige Induktion über k bewiesen:

Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ gilt:

$$F_{5k} \equiv 0 \pmod{5}, \quad F_{5k-l} \equiv a \pmod{5} \text{ mit } a \neq 0 \text{ für } l = 1, 2, 3, 4.$$

Für $k=1$ ist $F_{51} = 5 \equiv 0 \pmod{5}$, $F_{51-1} = 3$, $F_{51-2} = 2$, $F_{51-3} = 1$, $F_{51-4} = 1$. Die Behauptung gelte für $k \geq 1$. Zu zeigen ist, dass aus dieser Annahme folgt:

$$F_{5(k+1)} \equiv 0 \pmod{5}, \quad F_{5(k+1)-l} \equiv a \pmod{5} \text{ mit } a \neq 0 \text{ für } l = 1, 2, 3, 4.$$

Mit dem Ergebnis aus Aufgabe (h), das unabhängig vom Ergebnis von Aufgabe (g) bewiesen wird, folgt unmittelbar: $F_{5(k+1)} = h \cdot F_5 \equiv 0 \pmod{5}$. Mit dem Ergebnis aus Aufgabe (d) ergibt sich:

$$F_{5(k+1)-l} = F_{5k+5-l} = F_5 \cdot F_{5k-l+1} + F_4 \cdot F_{5k-l} = 5 \cdot F_{5k-l+1} + 3 \cdot F_{5k-l} \equiv 3 \cdot (F_{5k-l} \pmod{5}) \pmod{5}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $F_{5(k+1)-l} \equiv a \pmod{5}$ mit $a \neq 0$ für $l = 1, 2, 3, 4$. Wie man leicht nachprüft, ist dann auch $3 \cdot (F_{5k-l} \pmod{5}) \pmod{5} \neq 0$. Daher gilt die Behauptung auch für $k+1$.

- (h) Behauptet wird: Ist $n = l \cdot m$ mit $l \in \mathbb{N}$, so gilt $F_n = h \cdot F_m$ mit einer Zahl $h \in \mathbb{N}$.

Diese Behauptung wird durch vollständige Induktion über l bewiesen, wobei für $l = 1$ nichts zu zeigen ist.

In Aufgabe (d) wird $n = m$ und $k = m$ gesetzt. Dann ist

$$F_{2m} = F_m \cdot F_{m+1} + F_{m-1} \cdot F_m = F_m \cdot (F_{m-1} + F_{m+1}).$$

Für $k = 2 \cdot m$ ergibt sich

$$F_{3m} = F_{2m} \cdot F_{m+1} + F_{2m-1} \cdot F_m = F_m \cdot (F_{m-1} + F_{m+1}) \cdot F_{m+1} + F_{2m-1} \cdot F_m = F_m \cdot h.$$

Damit ist die Behauptung für $l = 2$ und $l = 3$ gezeigt. Sie gelte für $l \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} F_{m(l+1)} &= F_{m \cdot l + m} = F_{m \cdot l} \cdot F_{m+1} + F_{m \cdot l - 1} \cdot F_m \\ &= F_m \cdot h + F_{m \cdot l - 1} \cdot F_m \quad \text{nach Induktionsannahme} \\ &= F_m \cdot (h + F_{m \cdot l - 1}). \end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung auch für $l+1$.

Aufgabe 5.31:

- (a) Der einzige Knoten auf Niveau 0 (die Wurzel) hat die Nummer 1. Der ganz links stehende Knoten auf Niveau 1 trägt die Nummer 2. Das Niveau 2 enthält 2 Knoten (Nummern 2 und 3), so dass der erste Knoten auf Niveau 3 die Nummer 4 bekommt usw. Allgemein: Es sei j die Nummer eines Niveaus mit $0 < j < m$, wobei m die Nummer des

höchsten Niveaus ist. Da der Binärbaum vollständig ist, gibt es bis zum Niveau $j-1$ einschließlich $2^{(j-1)+1} - 1 = 2^j - 1$ viele Knoten. Also trägt der ganz links stehende Knoten auf Niveau j die Nummer 2^j .

- (b) Der Knoten mit der Nummer i stehe auf Niveau j . Vor ihm (auf Niveau j) stehen $l \geq 0$ viele Knoten. Also ist nach (a) $i = 2^j + l$. Diese Knoten vor ihm haben auf Niveau $j+1$ jeweils zwei Nachfolger, so dass vor dem linken Nachfolger des Knotens mit der Nummer i auf Niveau $j+1$ insgesamt $2 \cdot l$ viele Knoten stehen. Der linke Nachfolger hat also (da er auf Niveau $j+1$ steht) die Nummer $2^{j+1} + 2 \cdot l = 2 \cdot i$, der rechte Nachfolger die Nummer $2 \cdot i + 1$.

Aufgabe 6.1:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -123 & -31 & 29 \\ -111 & -108 & 146 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

Aufgabe 6.2:

- (a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{B}^2$. damit der binomische Lehrsatz gilt, muß $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ sein. Im Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ bzw. } \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 18 & 21 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 22 & 17 \end{bmatrix}.$$

Damit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ gilt, müssen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ quadratisch sein, etwa $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,n}$

und $\mathbf{B} = [b_{i,j}]_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,n}$, und es muß $\sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \cdot b_{i,k}$ gelten. Es genügt nicht, daß in $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$ jeweils die einzelnen Zeilen gleich den einzelnen Spalten sind, wie etwa das Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{zeigt. Hier ist } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 17 & 19 & 17 \\ 4 & 5 & 13 \\ 7 & 11 & 13 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & 4 & 7 \\ 19 & 5 & 11 \\ 17 & 13 & 13 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 6.3:

- (a) Es sei $(\mathbf{A}^T)^T = [b_{i,j}]$, $\mathbf{A}^T = [\bar{a}_{i,j}]$. Dann ist $b_{i,j} = \overline{\bar{a}_{i,j}} = \overline{a_{j,i}} = a_{i,j}$.

Es sei $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = [\bar{c}_{i,j}]$ mit $\bar{c}_{i,j} = c_{j,i}$ und $c_{j,i}$ = Element im Schnittpunkt der Zeile j und der Spalte i in $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

$$\bar{c}_{i,j} = c_{j,i} = \sum_{k=1}^n a_{j,k} \cdot b_{k,i} = \text{Element in der } i\text{-ten Zeile und } j\text{-ten Spalte von } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T.$$

Das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte von $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$ lautet

$$\sum_{k=1}^n \bar{b}_{i,k} \cdot \bar{a}_{k,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,i} \cdot a_{j,k} = c_{j,i} = \bar{c}_{i,j}.$$

- (b) Es sei $\mathbf{A}$ eine (n, m) -Matrix. Dann ist $\mathbf{A}^T$ eine (m, n) -Matrix. Also sind die Produkte $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)$ und $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$ immer definiert: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ ist eine (n, n) -Matrix und $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ eine (m, m) -Matrix. Es gilt nach (a):

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A}^{TT} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \text{ und} \\ (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^T &= \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}^{TT} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}, \text{ d.h.} \end{aligned}$$

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)$ und $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$ sind quadratische, zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrizen.

Aufgabe 6.4:

(a) $k_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ impliziert:

$$k_1 = 0 \quad (1. \text{ Zeile}),$$

$$2 \cdot k_2 - k_3 = 0 \quad (2. \text{ Zeile}) \text{ und}$$

$$k_1 + k_3 = 0 \quad (3. \text{ Zeile}).$$

Daher ist $k_3 = -k_1 = 0$ und $2 \cdot k_2 = k_3 = 0$, also $k_2 = 0$. Die Vektoren sind linear unabhängig.

(b) $k_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ führt auf $2 \cdot k_1 = 0$ (1. Zeile) und $-2 \cdot k_2 = 0$ (2. Zeile), also

$$k_1 = k_2 = 0. \text{ Die 3. Zeile wird nicht gebraucht.}$$

(c) $k_1 \cdot [3 \quad 1 \quad -1] + k_2 \cdot [-1 \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}] = [0 \quad 0 \quad 0]$ impliziert $k_2 = 3 \cdot k_1$ (1. Spalte). Die an-

deren beiden Zeilen führen auf dieselbe Gleichung. Man kann daher $k_1 \neq 0$ beliebig wählen; die Vektorgleichung bleibt erfüllt. Daher sind die Vektoren linear-abhängig.

- (d) Die Gleichung $k_1 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + k_2 \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + k_3 \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{0}$ impliziert

$(k_1 + k_3) \cdot \vec{a} + (k_1 + k_2) \cdot \vec{b} + (k_2 + k_3) \cdot \vec{c} = \vec{0}$ und wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$k_1 + k_3 = 0 \quad (\text{Zeile 1})$$

$$k_1 + k_2 = 0 \quad (\text{Zeile 2})$$

$$k_2 + k_3 = 0 \quad (\text{Zeile 3})$$

$k_3 = -k_2$ (aus Zeile 3) in Zeile 1 einsetzen ergibt $k_1 = k_2$. Diese Ergebnisse werden in Zeile 2 eingesetzt, und es folgt $2 \cdot k_2 = 0$, also nacheinander $k_2 = 0$, $k_1 = 0$ und $k_3 = 0$, also ist $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{c}\}$ eine Menge linear-unabhängiger Vektoren.

Es gilt $\vec{a} + \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{b} + \vec{c})$, d.h. einer der Vektoren ist eine Linearkombination der beiden anderen. Die Menge $\{\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{c}\}$ ist linear-abhängig.

Aufgabe 6.5:

(a) $x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = 2$

(b) $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 3$

(c) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 3$

(d) $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0$

- (e) Die erweiterte Koeffizientenmatrix wird elementaren Umformungen unterworfen, so daß sie möglichst auf Diagonalform kommt:

Ausgangsmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \end{array} \right]$$

Die erste Zeile wird mit -3 multipliziert und zur zweiten Zeile addiert. Entsprechend wird die erste Zeile mit -2 multipliziert und zur dritten Zeile addiert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

Die zweite Zeile wird zur dritten Zeile addiert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Die Lösung ist nicht eindeutig. Man kann x_3 beliebig wählen. Aus der zweiten Zeile folgt $-x_2 - 2 \cdot x_3 = -4$ bzw. $x_2 = 4 - 2 \cdot x_3$. Aus der ersten Zeile ergibt sich $x_1 = 3 - x_2 - x_3$. Die Lösungsmenge lautet also:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} \mid u \in \mathbf{R}, x_1 = u - 1, x_2 = 4 - 2 \cdot u \right\}.$$

(f) $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = 0$

Aufgabe 6.6:

Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array} \right]$$

Elementare Umformungen führen auf

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 6 & -a + 2 \end{array} \right]$$

Es gibt eine *eindeutige Lösung*, wenn der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der Koeffizientenmatrix gleich 3 ist, d.h. bei $-a^2 - a + 6 \neq 0$, also bei $a \neq -3$ und $a \neq 2$.

Es gibt *keine Lösung* bei $-a^2 - a + 6 = 0$ und $-a + 2 \neq 0$, d.h. bei $a = -3$.

Es gibt unendlich viele Lösungen bei $-a^2 - a + 6 = 0$ und $-a + 2 = 0$, d.h. bei $a = 2$.

Aufgabe 6.7:

(a)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Elementare Umformungen führen auf

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Daher ist der Rang gleich 3.

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Elementare Umformungen führen auf

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Rang ist 4.

Aufgabe 6.8:

(a) Die einzelnen Zwischenschritte, die zur inversen Matrix führen, sind:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -4 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/4 & -1/4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 \end{array} \right], \text{ d.h. } \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & -5/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,4 & 0,1 & -0,1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 6.9:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$