WORKING PAPER

Messung und Darstellung von Ungleichheit

von
Maik Heinemann

University of Lüneburg
Working Paper Series in Economics

No. 108

November 2008

www.leuphana.de/vwl/papers

ISSN 1860 - 5508

Messung und Darstellung von Ungleichheit

Maik Heinemann*

6. November 2008

Zusammenfassung

Das Papier gibt einen einführenden Überblick über wesentliche Konzepte der Messung von Einkommens- bzw. Vermögensungleichheit und Armut. Es werden grundlegende Prinzipien der Ungleichheitsmessung vorgestellt und analysiert, inwieweit einige gebräuchliche Ungleichheitsmaße diesen Prinzipien genügen. Die Beziehungen zwischen der Ungleichheitsmessung und der Wohlfahrtstheorie werden ebenfalls diskutiert. Darüber hinaus wird ein kurzer Überblick über Konzepte gegeben, die bei der Armutsmessung verwendet werden. Schließlich werden auch in der formalen Analyse häufig verwendete parametrische Verteilungen vorgestellt.

*Ich danke Christiane Clemens für Anregungen und kritische Kommentare.

ANSCHRIFT: Universität Lüneburg, Institut für Volkswirtschaftslehre, D–21 332 Lüneburg, Germany, e–mail: *heinemann@uni-lueneburg.de*.

Inhalt

1 Verteilung, Ungleichheit und Gerechtigkeit **1**

2 Begründung von Ungleichheitsmaßen **2**
2.1 Grundlegende Prinzipien bei der Messung von Ungleichheit 3
2.2 Reihung von Verteilungen 5

3 Einige Ungleichheitsmaße **7**
3.1 Der Variationskoeffizient 8
3.2 Der Gini–Koeffizient 9
3.3 Die Lorenzkurve 11
3.4 Ein kurzer Blick auf empirische Befunde 15

4 Soziale Wohlfahrtsfunktionen **17**
4.1 Eigenschaften sozialer Wohlfahrtsfunktionen 18
4.2 Ungleichheit und Wohlfahrt 23
4.3 Der Atkinson–Index und das Atkinson–Maß 28

5 Stochastische Dominanz und Ungleichheitsmessung **29**
5.1 Stochastische Dominanz 1. und 2. Grades 29
5.2 Stochastische Dominanz und Lorenz–Dominanz 32

6 Weitere Aspekte der Ungleichheitsmessung **33**
6.1 Zerlegung von Ungleichheitsmaßen 33
6.2 Der Theil–Index und andere Entropiemaße 33

7 Armutsmessung **35**
7.1 Definition von Armut 35
7.2 Einige gebräuchliche Armutsmaße 36

8 Ungleichheit bei parametrisch spezifizierten Verteilungsfunktionen **38**
8.1 Nützlichkeit parametrisch spezifizierte Verteilungen 38
8.2 Die Lognormalverteilung 39
8.3 Die Pareto–Verteilung 41

9 Ausblick **44**

Literaturverzeichnis **45**

1 Verteilung, Ungleichheit und Gerechtigkeit

Die Frage, wie der Wohlstand einer Nation auf ihre Mitglieder verteilt wird, steht nicht nur für Ökonomen seit jeher im Zentrum wissenschaftlicher Analysen. Auch ein Blick auf aktuelle politische Diskussionen zeigt, dass nahezu jede wirtschaftspolitische Maßnahme insbesondere auch im Hinblick auf ihre Verteilungsimplikationen beurteilt wird. Nun setzt aber gerade die Frage nach den Verteilungsimplikationen einen Maßstab zur Beurteilung einer Einkommens- und Vermögensverteilung voraus. Diesen aber zu definieren ist, wie im Folgenden gezeigt werden soll, keineswegs trivial.

Im Rahmen der Wohlfahrtstheorie verwenden Ökonomen zur Beurteilung von Allokationen — und so beispielsweise bei der Beurteilung wirtschaftspolitischer Eingriffe — in aller Regel das Pareto–Kriterium. Dieser Beurteilungsmaßstab ist zwar recht voraussetzungslos und daher im Allgemeinen konsensfähig, allerdings ist das Pareto–Kriterium eben nur ein schwaches Kriterium, da es interpersonelle Nutzenvergleiche ausschließt. Viele ökonomisch interessante Fragestellungen lassen sich daher nicht mit diesem Kriterium beurteilen. Dies trifft insbesondere auf Verteilungsfragen zu, bei denen es ja gerade darum geht, wie ein gegebenes Ganzes auf eine bestimmte Anzahl von Individuen aufgeteilt wird. Ohne interpersonelle Nutzenvergleiche anzustellen, können solche Fragen wohlfahrtsökonomisch nicht beantwortet werden.

Im Weiteren soll erläutert werden, welche Konzepte zur Darstellung und Messung von Ungleichheit unter Ökonomen gebräuchlich sind und wie im Rahmen dieser Konzepte mit dem Problem interpersoneller Nutzenvergleiche umgegangen wird. Dabei ist gleich zu Anfang darauf hinzuweisen, dass bei der Antwort auf die Frage nach der mit einer gegebenen Einkommens- oder Vermögensverteilung verbundenen Ungleichheit einige weitergehende Fragen unbeantwortet und einige Aspekte gänzlich unberücksichtigt bleiben. So wird zum Beispiel nicht danach gefragt werden, auf welchem Wege die zu beurteilenden Verteilungen zustande gekommen sind und welche weiteren ökonomischen Konsequenzen sich aus der ermittelten Ungleichheit ergeben. Während diese Aspekte für die Beurteilung der mit verschiedenen Verteilungen verbundenen Ungleichheit in der Tat unerheblich sind, sind sie beispielsweise für die weitergehende Frage nach der Gerechtigkeit einer Verteilung sehr wohl von Bedeutung. Wenn beispielsweise ein gegebenes Ganzes so auf eine bestimmte Anzahl von Individuen aufgeteilt wird, dass ein Individuum alles erhält, wogegen die Übrigen leer ausgehen, dürfte die Beurteilung dieser Verteilung unter Gerechtigkeitserwägungen sehr wohl davon abhängen, ob dieses eine Wirtschaftssubjekt als Einziges einen Beitrag zur Erstellung des Ganzen geleistet oder aber sich die Anteile der Übrigen gewaltsam angeeignet hat. Die Ungleichheit — in dem Sinne wie der Begriff im Weiteren gebraucht wird — der Verteilung wäre jedoch in beiden Fällen die Gleiche. Es sollte daher immer beachtet werden, dass die im Weiteren dargestellten Konzepte zur Messung von Ungleichheit keine Aussagen zur Verteilungsgerechtigkeit treffen. Sicherlich kann nicht jede denkbare Einkommens- oder Vermögensverteilung unter Gerechtigkeitsaspekten akzeptiert werden, da extreme Verteilungen beispielsweise schon aufgrund der Unveräußerbarkeit der Menschenrechte ausgeschlossen werden. Ebenso lässt sich beobachten, dass Gesellschaften nicht bereit sind, jedes Ausmaß an Ungleichheit hinzunehmen, ohne dass sich gesellschaftspolitischer Widerstand artikuliert. Das Problem ist jedoch, dass sich hier keine — über alle Gesellschaftsformen hinweg gültige — Regel aufstellen lässt, die festlegt, wo die Grenzlinie zu extremen bzw. gesellschaftlich inakzeptablen Verteilungen zu ziehen ist.

Abschließend noch einige Bemerkungen zu der für den Bereich der Ungleichheitsmessung relevanten Literatur. Grundlegende und über die im weiteren Verlauf erfolgende einführende Diskussion zum Teil weit hinausgehende formale Darstellungen finden sich bei bei Lambert (1989) und insbesondere Cowell (2000). Eine ebenfalls einführende Darstellung, die unter anderem auch einige weitere Ungleichheitsmaße eingeht, die hier nicht vorgestellt werden, findet sich bei Jenkins (1991), während Hauser & Wagner (2002) darüber hinaus auch einen Überblick über weitere Aspekte der Messung der personellen Einkommensverteilung liefern und empirische Befunde für Deutschland vorstellen. Darüber hinaus werden Messkonzepte und darauf basierende Ungleichheitsmaße in jedem einschlägigen Lehrbuch, beispielsweise bei Champernowne & Cowell (1998) zumindest knapp dargestellt.

2 Begründung von Ungleichheitsmaßen

Aussagen über die Gleichheit der Einkommens- oder Vermögensverteilung setzen zunächst einmal voraus, dass Klarheit darüber besteht, was denn genau unter Gleichheit bzw. Ungleichheit verstanden werden soll. Da subjektive Vorstellungen hierüber durchaus differieren können, soll im Folgenden versucht werden, einige grundlegende Prinzipien für den Vergleich von Verteilungen einzuführen. Das Ziel eines Vergleichs von Verteilungen ist es letztlich, diese Verteilungen in eine Rangordnung zu bringen, also beispielsweise aufsteigend hinsichtlich der mit ihnen verbundenen Ungleichheit zu reihen. Die besagten Prinzipien sollen nun festlegen, wann eine Verteilung gegenüber einer anderen als gleicher bzw. ungleicher eingestuft wird. Somit führen diese Prinzipien also zu einer Konkretisierung des Begriffs der Ungleichheit.

Festzuhalten ist allerdings, dass jede Reihung von Einkommens- oder Vermögensverteilungen eine Wertung impliziert, also normativen Charakter besitzt. Die angesprochenen Regeln dienen dazu, diese Werturteile transparent zu machen. Anzumerken ist auch, dass es auf der Basis der nachfolgend zu beschreibenden Prinzipien nicht notwendigerweise möglich sein wird, in jedem Fall eine widerspruchsfreie Rangfolge von Verteilungen zu erzeugen. Hierzu sind dann möglicherweise weitere und strengere Prinzipien heranzuziehen, die jedoch nicht immer und überall konsensfähig sind.

2.1 Grundlegende Prinzipien bei der Messung von Ungleichheit

Im Weiteren bezeichnet Y_i, $i = 1, \ldots N$ eine Einkommensverteilung aus einer gegebenen Anzahl von N Verteilungen. Jedes der Y_i repräsentiert daher einen Vektor, der beschreibt, welches Einkommen y_j einem Individuum j unter dieser Verteilung zufließt. Somit gilt $Y_i = (y_1, \ldots, y_n)$ für den Fall, dass Y_i eine Verteilung von Einkommen über n Individuen darstellt.[1]

Ein Ungleichheitsmaß oder Ungleichheitsindex ist dann eine Funktion der Einkommensverteilung $I(Y_i)$ mit der Eigenschaft, dass ein Anstieg von I eine Zunahme der Ungleichheit ausdrückt. Aus $I(Y_i) > I(Y_{i'})$ kann dann gefolgert werden, dass die Verteilung Y_i ungleicher als die Verteilung $Y_{i'}$ ist. Die im Rahmen der Ungleichheitsmessung verwendeten Ungleichheitsmaße, wie etwa der Gini–Koeffizient, tun genau dies: Für verschiedene Einkommensverteilungen lässt sich jeweils ein Gini–Koeffizient berechnen, der als Ungleichheitsmaß Verwendung findet. Auf gebräuchliche Ungleichheitsmaße wird unten noch genauer eingegangen. Hier soll zunächst eher allgemein geklärt werden, was diese Maße eigentlich messen sollen, um tatsächlich als Ungleichheitsmaß verwendet werden zu können.

Die eingangs erwähnten Prinzipien dienen nun dazu, einige Minimalanforderungen zu formulieren, denen ein Ungleichheitsmaße genügen soll. Diese Minimalanforderungen umfassen in der Regel die folgenden vier Prinzipien:[2]

P.1 Prinzip der Skaleninvarianz:

Das Prinzip der Skaleninvarianz besagt, dass das Ungleichheitsmaß invariant gegenüber einer proportionalen Variation aller Einkommen einer Verteilung Y_i sein soll. Von daher muss gelten:

$$I(Y_i) \equiv I(y_1, \ldots, y_n) = I(\alpha Y_i) \equiv I(\alpha y_1, \ldots, \alpha y_n), \quad \alpha > 0$$

Werden also sämtliche Einkommen einer gegebenen Einkommensverteilung mit der gleichen Konstanten $\alpha > 0$ multipliziert, so ändert sich die Ungleichheit nicht.

Eigentlich sollte dieses Prinzip kaum auf Widerspruch stoßen, impliziert es doch, dass es für Aussagen über die Ungleichheit keine Rolle spielt, in welchen Einheiten die zugrundeliegenden Einkommen gemessen werden. Gleichwohl

[1] Mitunter kann eine Einkommensverteilung durch eine diskrete oder stetige Verteilungsfunktion $F(y)$ bzw. Dichtefunktion $f(y)$ der Einkommen beschrieben werden. Auf den Fall stetiger Verteilungen wird unten, bei der Betrachtung von Ungleichheitsmaßen eingegangen werden.

[2] Eine ausführliche Diskussion dieser Prinzipien bzw. Axiome findet sich bei Cowell (2000).

beinhaltet dieses Prinzip aber ein Werturteil: Betrachten wir zwei Einkommensbezieher A und B mit den Einkommen $y_A = 10$ und $y_B = 100$ so führt ein Einkommensanstieg um 10% bei beiden Einkommensbeziehern gemäß dem Prinzip der Skaleninvarianz nicht zu einer Änderung der Ungleichheit, obwohl der Einkommenszuwachs des B absolut gesehen zehnmal höher ist als der des A. Ungleichheitsmaße, die dem Prinzip der Skaleninvarianz genügen. gehören zur Klasse der Maße relativer Einkommensungleichheit. Alternativ könnten auch Maße absoluter Einkommensungleichheit betrachtet werden. Diese sind dann invariant gegenüber gleichen absoluten Einkommenszuwächsen aller Einkommensbezieher.

P.2 Prinzip der Anonymität bzw. Symmetrie:

Das Prinzip der Anonymität bzw. Symmetrie besagt, dass das Ungleichheitsmaß unabhängig davon sein soll, welchen Individuen die Einkommen zufließen. Werden also die gegebenen Einkommenswerte den Individuen anders zugeordnet, so ändert sich die Einkommensungleichheit nicht:

$$I(y_1, y_2 \ldots, y_{n-1}, y_n) = I(y_n, y_{n-1}, \ldots, y_2, y_1)$$

Dieses Prinzip dürfte kaum Anlass zu kontroversen Diskussionen bieten.

P.3 Prinzip der Populationsinvarianz (Dalton (1920)):

Das Prinzip der Populationsinvarianz ähnelt in gewisser Weise dem der Skaleninvarianz. Es besagt, dass die Ungleichheit unverändert bleibt, wenn die Einkommensverteilung mitsamt ihrer Einkommensbezieher repliziert wird:

$$\begin{aligned} I(Y_i) &\equiv I(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= I(k \times Y_i) \equiv I(\underbrace{y_1, \ldots, y_1}_{k\times}, \underbrace{y_2, \ldots, y_2}_{k\times}, \ldots, \underbrace{y_n, \ldots, y_n}_{k\times}), \quad k > 0 \end{aligned}$$

Auch dieses Prinzip dürfte, insbesondere dann, wenn das Prinzip der Skaleninvarianz akzeptiert wird, kaum kontrovers beurteilt werden.

P.4 Transferprinzip (Pigou (1912), Dalton (1920)):

Dieses ist das zentrale Prinzip, das zu Aussagen über die Ungleichheit erlaubt. Es besagt, dass die Ungleichheit dann abnimmt, wenn bei einer gegebenen Einkommensverteilung ein Einkommenstransfer von einem reichen zu einem armen Einkommensbezieher stattfindet, ohne dass hierdurch die ursprüngliche Rangfolge der Einkommen verändert wird. Unter der Annahme, dass die Einkommensverteilung Y_i geordnet ist (d.h. $y_1 \leq \ldots \leq y_n$) gilt dann:

$$I(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_{n,i})$$
$$> I(y_1 + \tau, y_2, \ldots, y_n - \tau)\,, \quad \tau \leq \min[y_2 - y_1, y_n - y_{n-1}]$$

Das Transferprinzip drückt somit in milder Form eine grundsätzliche Einstellung darüber aus, wann Ungleichheit zunimmt bzw. abnimmt: Transfers von reichen zu relativ ärmeren Einkommensbeziehern vermindern generell die Ungleichheit. Da sowohl die Höhe der Transfers als auch die Positionen der am Transfer beteiligen Einkommensbezieher in der Einkommensverteilung nicht exakt spezifiziert werden, ist das Transferprinzip wenig restriktiv und daher höchstwahrscheinlich auch konsensfähig. Gleichwohl ist es dieses Prinzip, mit dem letztlich interpersonelle Vergleiche Eingang in die Ungleichheitsmessung finden und das — im Gegensatz zu den vorgenannten Prinzipien, die lediglich beschreiben was unter Ungleichheit nicht zu verstehen ist — explizit macht, was unter Ungleichheit verstanden werden soll.

Mit Hilfe der vier Prinzipien P.1–P.4 lassen sich nunmehr tatsächlich Vergleiche von Verteilungen anstellen, wenngleich — wie bereits oben erwähnt wurde — nicht immer eine vollständige Reihung von Einkommensverteilungen vorgenommen werden kann. Das Problem einer nicht vollständigen Reihung von Einkommensverteilungen ist letztlich der Preis, der gezahlt werden muss, wenn die wenig restriktiven Prinzipien P.1–P.4 zur Ungleichheitsmessung herangezogen werden. Weitergehende Aussagen erfordern die Formulierung weitergehender und damit auch restriktiverer Prinzipien. Auf derartige Probleme und deren Lösungsmöglichkeiten wird später noch genauer eingegangen werden.

2.2 Reihung von Verteilungen

Um zu zeigen, wie die vier oben genannten Prinzipien P.1–P.4 zur Reihung von Verteilungen verwendet werden können, sollen die vier in Tabelle 1 dargestellten

Tabelle 1: *Vier Einkommensverteilungen*

	Einkommensbezieher					
	1	2	3	4	5	Σ
Y_1	20	30	50	80	120	300
Y_2	15	20	30	35	50	150
Y_3	30	60				90
Y_4	10	35	35	35	35	150

Einkommensverteilungen betrachtet und einem Vergleich hinsichtlich der mit ihnen assoziierten Einkommensungleichheit unterzogen werden.

Beginnen wir mit einem Vergleich der Verteilungen Y_1 und Y_2. Beide Verteilungen weisen ein unterschiedliches Gesamteinkommen auf. Gemäß dem Prinzip der Skaleninvarianz, bleibt die Ungleichheit allerdings unverändert, wenn alle Einkommen der Verteilung Y_1 halbiert werden und eine modifizierte Verteilung $Y_1' = (10, 15, 25, 40, 60)$ zum Vergleich mit Y_2 herangezogen wird. Für den Vergleich stehen somit nun die folgenden beiden Verteilungen zur Verfügung:

	Einkommensbezieher					
	1	2	3	4	5	Σ
Y_1'	10	15	25	40	60	150
Y_2	15	20	30	35	50	150

Mit Hilfe dieser beiden Verteilungen kann nun gezeigt werden, dass sich Y_2 durch eine Folge von Transfers aus Verteilung Y_1' generieren lässt: Ausgehend von Y_1' wird das Einkommen der Einkommensbezieher 5 und 4 hierbei um 10 bzw. 5 Einheiten vermindert; der Gesamtbetrag von 15 Einheiten wird sodann gleichmäßig auf die Einkommensbezieher 1, 2 und 3 verteilt. Somit ist dem Transferprinzip folgend die Verteilung Y_2 gleicher als Verteilung Y_1', so dass $I(Y_1') > I(Y_2)$. Und da $I(Y_1) = I(Y_1')$ gilt, folgt daraus, dass $I(Y_1) > I(Y_2)$. Die Verteilung Y_1 ist mithin ungleicher als die Verteilung Y_2.

Etwas weniger offensichtlich liegt der Fall beim Vergleich der Verteilungen Y_2 und Y_3, da die Verteilung Y_3 lediglich zwei Einkommensbezieher umfasst. Hier kann zunächst das Prinzip der Populationsinvarianz verwendet werden, um Verteilungen Y_2' und Y_3' zu generieren, die jeweils eine identische Anzahl von Einkommensbeziehern beinhalten: Y_2' geht aus Y_2 hervor, indem die Anzahl eines jeden Einkommensbeziehers verdoppelt wird. Entsprechend entsteht Y_3' durch die Multiplikation eines jeden Einkommensbeziehers aus Y_3 mit fünf. Da Y_3' daraufhin ein Gesamteinkommen von 450 aufweist ($= 5 \times (30 + 60)$) kann schließlich noch eine zu Y_3' unter Ungleichheitsaspekten äquivalente Verteilung Y_3'' generiert werden, indem sämtliche Einkommenswerte mit $2/3$ multipliziert werden. Damit stehen die folgenden beiden Verteilungen für einen Vergleich zur Verfügung:

	Einkommensbezieher										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Y_2'	10	10	15	15	25	25	40	40	60	60	300
Y_3''	20	20	20	20	20	40	40	40	40	40	300

Es kann nun gezeigt werden, dass Y_3'' aus Y_2' durch eine Folge von Transfers generiert werden kann: Ausgehend von Y_2' vermindert sich das Einkommen der Einkommensbezieher 9 und 10 um jeweils 20 Einheiten und das von 5 um 5 Einheiten. Der

Gesamtbetrag an Transfers in Höhe von 45 Einheiten wird verwendet, um die Einkommensbezieher 1 und 2 mit jeweils 10 Einheiten, 2 und 3 mit jeweils 5 Einheiten und schließlich 6 mit 15 Einheiten auszustatten. Somit gilt $I(Y_2') > I(Y_3'')$ und daher auch $I(Y_2) > I(Y_3)$; die Verteilung Y_2 ist daher ungleicher als die Verteilung Y_3.

Es wurde bereits erwähnt, dass die Prinzipien P.1–P.4 zwar in gewissen Situationen eine Reihung von Verteilungen erlauben, es aber durchaus Fälle geben kann, in denen diese Prinzipien nicht ausreichen, eindeutige Aussagen abzuleiten. Ein Beispiel für einen solchen Fall stellt der Vergleich der Verteilungen Y_2 mit Y_4 dar. Beide Verteilungen lassen sich nicht durch eine Folge von Transfers, die dem Transferprinzip genügen, ineinander überführen. Durch einen Transfer von 15 Einheiten des Einkommensbeziehers 5 unter Verteilung Y_2 an die Einkommensbezieher 2 (+15) und 3 (+5) ließe sich die relativ zu Y_2 gleichere Verteilung Y_2' generieren:

	Einkommensbezieher					
	1	2	3	4	5	Σ
Y_2'	15	30	35	35	35	150
Y_4	10	35	35	35	35	150

Was nun die Verteilungen Y_2' und Y_4 betrifft, ist Y_4 eindeutig ungleicher als Y_2', da ein Transfer von 5 Einheiten von Einkommensbezieher 2 zu Einkommensbezieher 1 die Verteilung Y_4 in die Verteilung Y_2' überführen würde. Damit jedoch lassen sich keine Aussagen über Ungleichheit von Y_2 relativ zu Y_4 ableiten: Zwar gilt $I(Y_2') < I(Y_4)$, jedoch ebenfalls $I(Y_2') < I(Y_2)$. Um Aussagen darüber, welche der beiden Verteilungen ungleicher ist abzuleiten, wären demnach über die Prinzipien P.1–P.4 hinausgehende Werturteile erforderlich. Auf derartige weitergehende Werturteile — die dann durch eine soziale Wohlfahrtfunktion ausgedrückt werden — wird weiter unten noch genauer eingegangen. Zunächst sollen im Weiteren einige häufig verwendete Ungleichheitsmaße vorgestellt und hinsichtlich ihrer Vereinbarkeit mit den oben diskutierten Prinzipien P.1–P.4 untersucht werden.

3 Einige Ungleichheitsmaße

Der Vorteil eines Ungleichheitsmaßes besteht im Wesentlichen darin, die in einer Einkommensverteilung enthaltenen Informationen zu verdichten und in einem Index zu komprimieren. Damit sind dann Aussagen über die Ungleichheit relativ leicht ableitbar, ohne dass eher umständliche Überlegungen über Transfers, wie oben bei der Betrachtung der Verteilungen aus Tabelle 1, angestellt werden müssen. Wünschenswert wäre natürlich ein Ungleichheitsmaß, dass den oben diskutierten vier Prinzipien P.1–P.4 exakt genügt. Die im Weiteren zu diskutierenden gebräuchlichen Ungleichheitsmaße genügen diesen Prinzipien zwar sämtlichst, treffen aber teilweise auch dann Aussagen, wenn eine eindeutige Reihung nach den Prinzipien P.1–

P.4 nicht möglich ist. Erkauft wird der Vorteil der leichten Handhabbarkeit dieser Ungleichheitsmaße demnach unter Umständen dadurch, dass diese Maße implizit weitergehende Werturteile treffen, die es im Folgenden herauszuarbeiten gilt.

3.1 Der Variationskoeffizient

Der Variationskoeffizient $\nu(Y)$ einer Verteilung Y setzt die Standardabweichung der Einkommensverteilung $\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2}$ ins Verhältnis zum Erwartungswert bzw. Mittelwert der Einkommen μ_y:

$$\nu(Y) = \frac{\sqrt{\sigma_y^2}}{\mu_y} \tag{1}$$

Die mit einer Einkommensverteilung assoziierte Ungleichheit ist bei der Verwendung dieses Maßes um so geringer, je kleiner $\nu(Y)$ ist. Im Extremfall einer egalitären Verteilung gilt $\sigma_y^2 = 0$ und mithin ebenfalls $\nu(Y) = 0$.

Der Variationskoeffizient genügt, wie sich leicht zeigen lässt, dem Prinzip der Skaleninvarianz, dem Populationsprinzip und dem Prinzip der Anonymität und Symmetrie. Dass der Variationskoeffizient auch dem Transferprinzip genügt, lässt sich zeigen, wenn der Zählerterm von (1) auftretende Ausdruck für die Varianz ausformuliert wird. Im Fall einer endlichen Anzahl n von Einkommensbeziehern folgt:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2$$

Findet nun ein Transfer τ von einem Einkommensbezieher m zu einem Einkommensbezieher l mit $y_m > y_l$ statt, so ändert sich die Varianz um den Betrag:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_y^2 &= \frac{1}{n}\left[(y_l - \mu_y)^2 + (y_m - \mu_y)^2\right] - \frac{1}{n}\left[(y_l + \tau - \mu_y)^2 + (y_m - \tau - \mu_y)^2\right] \\ &= -2\tau^2 + 2\tau(y_m - y_l)\end{aligned} \tag{2}$$

Da $y_m > y_l$ und $\tau < y_m - y_l$ (der Transfer ändert die Rangfolge der Einkommen nicht) gilt, ist die rechte Seite von (2) grundsätzlich negativ, so dass dieser Transfer zu einer Verringerung der Varianz und damit — wie vom Transferprinzip gefordert — zu einer Verringerung des Variationskoeffizienten führt.

Allerdings trifft der Variationskoeffizient auch in den Fällen Aussagen, in denen auf der Grundlage der Prinzipien P.1–P.4 allein eigentlich keine eindeutige Reihung von Einkommensverteilungen vorgenommen werden kann. Beispielsweise weist die oben in Tabelle 1 aufgeführte Verteilung Y_2 einen Variationskoeffizienten von $\nu(Y_2) = 0.456435$ $(= 1/2\sqrt{5/6})$ auf, wogegen sich für Y_4 der Variationskoeffizient $\nu(Y_4) = 0.372678$ $(= 1/6\sqrt{5})$ ergibt. Bei der Verwendung des Variationskoeffizienten würde demnach geschlussfolgert werden, dass die Verteilung Y_2 ungleicher als die

Verteilung Y_4 ist. Was führt nun dazu, dass der Variationskoeffizient auch in diesem uneindeutigen Fall eine Reihung der Einkommensverteilungen vornimmt? Betrachten wir dazu nochmals den Ausdruck für die Varianz, diesmal jedoch für einen Fall, in dem ein Transfer von 2τ vom Einkommensbezieher m, der zu gleichen Teilen jeweils einem reicheren Einkommensbezieher k und einem ärmeren Einkommensbezieher l mit $y_k > y_m > y_l$ zufließt.

Dem Transferprinzip folgend, kann die damit einhergehende Änderung der Ungleichheit nicht eindeutig beurteilt werden. Betrachten wird aber abermals die Änderung der Varianz, so ergibt sich in diesem Fall analog zu (2):

$$
\begin{aligned}
\Delta\sigma_y^2 = &\frac{1}{n}\left[(y_l-\mu_y)^2+(y_m-\mu_y)^2+(y_k-\mu_y)^2\right] \\
&-\frac{1}{n}\left[(y_l+\tau-\mu_y)^2+(y_m-2\tau-\mu_y)^2+(y_k+\tau-\mu_y)^2\right] \\
= &-6\tau^2+2\tau\left[(y_m-y_l)+(y_m-y_k)\right]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Das Vorzeichen der rechten Seite von (3) ist im Allgemeinen unbestimmt. Der Variationskoeffizient kann demnach infolge solcher Transfers sowohl sinken als auch steigen. Letztlich sind neben der Höhe des Transfers τ auch die Einkommensdifferenzen der Beteiligten ausschlaggebend dafür, ob der Variationskoeffizient steigt oder fällt.

Sofern die Einkommensdifferenzen zwischen den beteiligten Einkommensbeziehern identisch sind, ist der in (3) in eckigen Klammern stehende Term gleich Null, die Änderung der Varianz folglich negativ und der Variationskoeffizient sinkt. Ebensolches ergibt sich für den Fall $y_k - y_m > y_m - y_l$. Hier ist der Klammerterm negativ und der Variationskoeffizient sinkt. Nur dann, wenn für die Einkommensdifferenzen $y_k - y_m < y_m - y_l$ gilt, kann der Variationskoeffizient ansteigen. Letztlich nimmt der Variationskoeffizient implizit eine Wertung der betrachteten Transfers vor, von denen einer — der vom reicheren zum ärmeren Einkommensbezieher — die Ungleichheit tendenziell vermindert und der andere — der vom reichen zum noch reicheren Einkommensbezieher — die Ungleichheit tendenziell erhöht.

3.2 Der Gini–Koeffizient

Der Gini–Koeffizient ist ein häufig verwendetes Ungleichheitsmaß, das sich in mehreren alternativen Darstellungen formulieren lässt. Betrachten wir zunächst eine diskrete Einkommensverteilung $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ mit $y_1 \leq \ldots \leq y_n$, so ergibt sich der Gini–Koeffizient $G(Y)$ als Hälfte der durch den Mittelwert der Einkommen dividierten Summe der mittleren absoluten Einkommensdifferenzen:

$$
G(Y) = \frac{1}{2n^2\mu_y}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|y_i - y_j| \tag{4}
$$

Für den Gini–Koeffizienten gilt grundsätzlich $0 \leq G(Y) \leq \frac{n-1}{n} < 1$, wobei der Wert 0 nur dann angenommen wird, wenn alle Einkommen identisch sind — die Ungleichheit folglich minimal ist. Der Gini–Koeffizient wird maximal, wenn ein Einkommensbezieher das Gesamteinkommen ($y_n = n\mu_y$) bezieht und der Rest ein Einkommen von 0 aufweist. In diesem Fall ergibt sich aus (4), dass $G(Y) = \frac{n-1}{n}$.

Eine alternative Möglichkeit, den Gini–Koeffizienten zu berechnen besteht darin, die individuellen Einkommen zu addieren und dabei so zu gewichten, dass das Gewicht um so größer ausfällt, je niedriger der jeweilige Rang in der Einkommensverteilung ist:

$$G(Y) = 1 + \frac{1}{n} - 2\,\frac{n y_1 + (n-1) y_2 + \ldots + 2 y_{n-1} + y_n}{n^2\,\mu_y} \tag{5}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4) und (5) lässt sich recht einfach zeigen, dass der Gini–Koeffizient den Prinzipien P.1 und P.3 der Skalen- und Populationsinvarianz genügt. Die Gültigkeit des Transferprinzips lässt sich zeigen, wenn die sich ergebende Änderung ΔG des Gini–Koeffizienten bei einem Transfer τ von einem reichen Einkommensbezieher m zu einem ärmeren Einkommensbezieher l — wobei $l < m \leq n$ gleichzeitig den Rang in der Einkommensverteilung widerspiegelt — berechnet wird. Aus (5) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
\Delta G = {} & 2\,\frac{(n-l+1)\,y_l + (n-m+1)\,y_m}{n^2\,\mu_y} \\
& - 2\,\frac{(n-l+1)\,(y_l+\tau) + (n-m+1)\,(y_m-\tau)}{n^2\,\mu_y} \\
= {} & -\frac{\tau\,(m-l)}{n^2\,\mu_y}
\end{aligned} \tag{6}$$

Wegen $m > l$ ist die Änderung des Gini–Koeffizienten negativ. Der Gini–Koeffizient sinkt demnach infolge eines solchen Transfers, womit gezeigt ist, dass der Gini–Koeffizient dem Transferprinzip genügt.

Werden stetige Einkommensverteilungen betrachtet, so dass $f(y)$ die Dichte und entsprechend $F(y)$ die Verteilungsfunktion der Einkommen bezeichnet, folgt:

$$G(Y) = \frac{2}{\mu_y} \int_0^\infty y F(y)\, f(y) dy \tag{7}$$

Eine zu (5) äquivalente Darstellung des Gini–Koeffizienten im stetigen Fall ist:

$$G(Y) = \frac{2}{\mu_y}\,\mathrm{Cov}(y, F(y)) \tag{8}$$

Der Gini–Koeffizient ergibt sich demzufolge aus der Kovarianz zwischen den Einkommen und deren jeweiligen Rängen in der Einkommensverteilung.

Ebenso wie der Variationskoeffizient, nimmt der Gini–Koeffizient auch dann eine Reihung von Einkommensverteilungen vor, wenn diese allein auf der Grundlage der Prinzipien P.1–P.4 nicht eindeutig möglich ist. Für die oben in Tabelle 1 dargestellte Verteilung Y_2 resultiert $G(Y_2) = 0.2667$ ($= 170/750$), wogegen sich für die Verteilung Y_2 ein Gini–Koeffizient $G(Y_4) = 0.13333$ ($= 2/15$) ergibt. Ebenso wie der Variationskoeffizient führt demnach auch der Gini–Koeffizient zu der Einschätzung, dass die Verteilung Y_2 ungleicher als die Verteilung Y_4 ist. Der Grund hierfür ist, dass — wie (5) zeigt — ein Einkommenstransfer τ von einem reichen zu einem relativ ärmeren Einkommensbezieher die Ungleichheit umso stärker sinken lässt, je geringer der Rang des empfangenden Einkommensbeziehers in der Einkommensverteilung ist. Selbst wenn also neben den üblichen Transfers von reichen zu relativ armen Einkommensbeziehern auch Transfers von armen zu relativ reicheren Einkommensbeziehern erfolgen, kann die durch den Gini–Koeffizienten gemessene Ungleichheit sinken, sofern die armen Transferbezieher recht weit unten in der Einkommenshierarchie angesiedelt sind.

3.3 Die Lorenzkurve

Eines der grundlegenden Ungleichheitsmaße ist die Lorenzkurve. Zwar handelt es sich hierbei letztlich um eine Kurve — also ein grafisches Konstrukt und keine Maßzahl —, dennoch lassen sich mit Hilfe dieser Kurve recht weitreichende Aussagen über die Ungleichheit ableiten.

Gehen wir zunächst wieder von einer diskreten Einkommensverteilung $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ mit $y_1 \leq \ldots \leq y_n$ aus. Die Lorenzkurve beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Anteil am Gesamteinkommen, den die $n_j \leq n$ ärmsten Einkommensbezieher auf sich vereinigen ($\sum_{i=1}^{j} y_i/(n\mu_y)$) und dem Anteil dieser Einkommensbezieher an deren Gesamtzahl n_j/n:

$$L_Y\left(\frac{n_j}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{j} y_i}{n\mu_y}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{9}$$

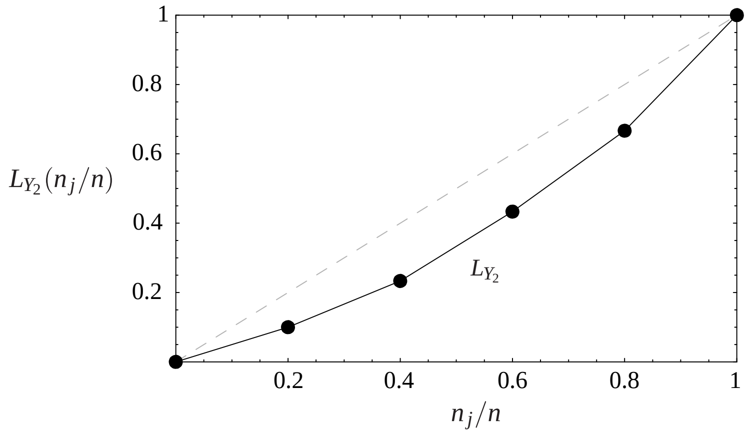
Generell wird hierbei noch der Punkt $L(0) = 0$ hinzugefügt, so dass die Lorenzkurve für alle $0 \leq n_j/n \leq 1$ streng monoton steigend zwischen $L(0) = 0$ und $L(1) = 1$ verläuft.

Für die oben in Tabelle 1 betrachtete Einkommensverteilung Y_2 ergibt sich:

n_j/n	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$L_{Y_2}(n_j/n)$	0	0.1	0.233	0.433	0.667	1.0

Die resultierende Kurve ist in Abbildung 1 dargestellt. Die dargestellte Lorenzkurve verläuft unterhalb der ebenfalls eingezeichneten Winkelhalbierenden, was letztlich eine nichtegalitäre Verteilung der Einkommen anzeigt. Der Grund hierfür

Abbildung 1: *Lorenzkurve für die Einkommensverteilung Y_2*



ist, dass sich im Fall einer egalitären Einkommensverteilung eine Lorenzkurve ergibt, die identisch mit der Winkelhalbierenden ist. Von daher kann der Abstand der Lorenzkurve von der Winkelhalbierenden — genauer, die Fläche zwischen der Winkelhalbierenden und der Lorenzkurve — als Maß für die Ungleichheit herangezogen werden: Je kleiner diese Fläche ist, um so geringer ist die Ungleichheit. Sie ist gleich Null im Fall einer egalitären Verteilung und maximal, wenn ein einziges Individuum sämtliche Einkommen bezieht und alle übrigen leer ausgehen.

Im Fall einer stetigen Einkommensverteilung Y mit der Dichtefunktion $f(y)$ und der Verteilungsfunktion $F(y)$, ist die Lorenzkurve folgendermaßen definiert:

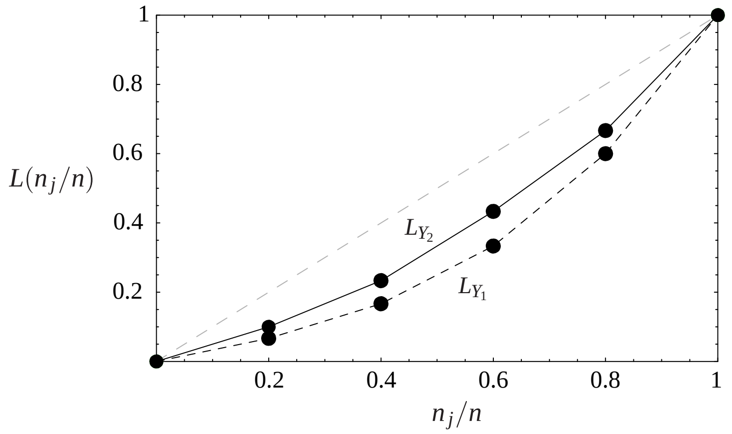
$$L(p) = \frac{1}{\mu_y} \int_0^{F^{-1}(p)} y\, f(y)\, dy, \quad 0 \leq p \leq 1 \tag{10}$$

p bezeichnet hierbei den Prozentpunkt der Einkommensverteilung und aus der Inversen der Verteilungsfunktion an der Stelle p, $F^{-1}(p)$, ergibt sich das Einkommen y_p an der oberen Grenze des Integrals, für das gilt $F(y_p) = p$.

Die Lorenzkurve einer stetigen Einkommensverteilung ist eine stetige und zwischen $L(0) = 0$ und $L(1) = 1$ streng monoton wachsende Funktion. Es lässt sich zeigen, dass die Steigung der Lorenzkurve an der Stelle $p_\mu = F(\mu_y)$ — dem Prozentpunkt der Verteilung, der dem Durchschnittseinkommen μ_y entspricht — den Wert 1 annimmt. Es gilt also $L'(p_\mu) = 1$, so dass der Abstand zwischen der Lorenzkurve und der Winkehalbierenden für diesen Prozentpunkt maximal wird.

Interessanterweise besteht zwischen dem auf der Lorenzkurve basierenden Ungleichheitsmaß und dem oben beschriebenen Gini–Koeffizienten eine enge Beziehung. Der Gini–Koeffizient ist nichts anderes als das Zweifache der Fläche zwischen der Winkelhalbierenden und der Lorenzkurve:

Abbildung 2: *Lorenzkurven für die Einkommensverteilungen Y_1 und Y_2*



$$G(Y) = 1 - 2\int_0^1 L(p)\,dp \tag{11}$$

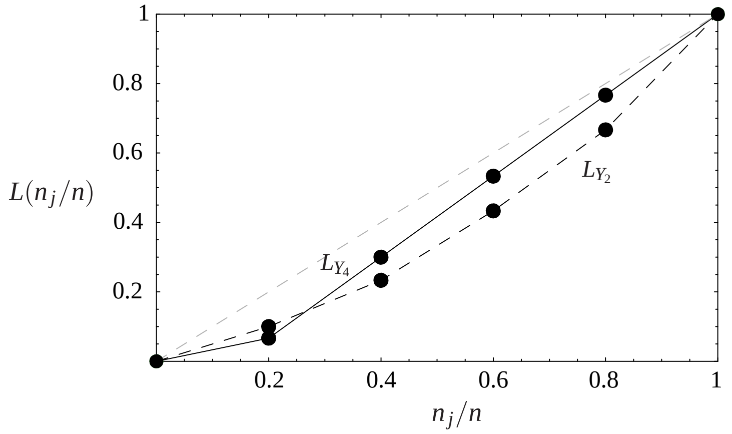
Basierend auf dem Konzept der Lorenzkurve ist eine Verteilung Y' dann ungleicher als eine Verteilung Y, wenn die Lorenzkurve $L_Y(p)$ oberhalb von $L_{Y'}(p)$ verläuft, so dass $L_Y(p) \geq L_{Y'}(p)$ für alle $0 < p < 1$ mit strenger Ungleichheit für einige p. Ist dieses der Fall, spricht man von Lorenz–Dominanz. Die Verteilung Y Lorenz–dominiert dann die Verteilung Y'. Abbildung 2 zeigt die Lorenzkurven für die oben in Tabelle 1 dargestellten Verteilungen Y_1 und Y_2. Es wird deutlich, dass die Verteilung Y_2 die Verteilung Y_1 Lorenz–dominiert.

Es lässt sich zeigen, dass Lorenz–Dominanz dann und nur dann gegeben ist, wenn sich Verteilungen mit Hilfe der Prinzipien P.1–P.4 in eine eindeutige Rangfolge bringen lassen. Dieses grundlegende und im weiteren Verlauf wichtige Resultat wird im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz 3.1 (Lorenz–Dominanz und Ungleichheit) *Zwei beliebige Verteilungen Y und Y' lassen sich dann und nur dann mit Hilfe der Prinzipien P.1–P.4 hinsichtlich der Ungleichheit in eine eindeutige, widerspruchsfreie Rangfolge bringen, wenn eine dieser Verteilungen die jeweils andere Lorenz–dominiert.*

Da die Lorenzkurve offensichtlich den Prinzipien P.1–P.3 genügt, also beispielsweise invariant gegenüber einer proportionalen Variation der Einkommen ist, ergibt sich aus Satz 3.1 Folgendes: Eine Verteilung Y' lässt sich dann und nur dann aus einer Verteilung Y mit gleichem Mittelwert durch eine Folge von Transfers von reichen zu ärmeren Individuen generieren, wenn die Verteilung Y' die Verteilung Y Lorenz–dominiert.

Abbildung 3: *Lorenzkurven für die Einkommensverteilungen Y_2 und Y_4*



Satz 3.1 und dessen Implikation verdeutlichen, dass die Lorenzkurve als ein grundlegendes Konzept verstanden werden kann, mit dessen Hilfe Ungleichheit beurteilt werden kann. Sofern keine Lorenz–Dominanz einer Verteilung gegenüber einer anderen gegeben ist, müssen sich die betreffenden Lorenzkurven mindestens einmal schneiden, was somit gleichbedeutend damit ist, dass sich mit Hilfe der Prinzipien P.1–P.4 keine eindeutige Reihung der fraglichen Verteilungen vornehmen lässt. Abbildung 3 zeigt zur Illustration dieses Sachverhalts die Lorenzkurven für die oben in Tabelle 1 dargestellten Verteilungen Y_2 und Y_4 von denen ja bereits bekannt ist, dass sie sich nicht eindeutig ordnen lassen. Es wird deutlich, dass sich die Lorenzkurven einmal schneiden, mithin keine Lorenz–Dominanz vorliegt.

Abbildung 3 verdeutlicht auch, warum eine Ordnung der beiden zugrundeliegenden Verteilungen ohne weitergehende Wertungen nicht möglich ist. Im Vergleich zu Y_2 ist sind die höheren Einkommen bei der Verteilung Y_4 zwar gleicher verteilt (genauer gesagt — wie die transformierte Verteilung Y_4' zeigt — sogar identisch), dafür ist der Anteil armer Einkommensbezieher jedoch größer. Ohne ein Werturteil darüber zu treffen, wie diese beiden Effekte hinsichtlich einer insgesamt resultierenden Ungleichheit zu bewerten sind, lassen sich die beiden Verteilungen nicht in eine eindeutige Rangfolge bringen. Die oben betrachten Ungleichheitsmaße Variationskoeffizient und Gini–Koeffizient haben implizit eine solche Wertung vorgenommen. Sie haben letztlich die egalitäre Verteilung der höheren Einkommen stärker gewichtet als den höheren Anteil ärmerer Einkommensbezieher und führen daher zu der Schlussfolgerung, dass die Verteilung Y_2 ungleicher ist als die Verteilung Y_4.

Zum Abschluss dieser Diskussion grundlegender Konzepte der Ungleichheitsmessung und gebräuchlicher Ungleichheitsmaße muss auf eine wesentliche Eigenschaft der so vorgenommenen Ungleichheitsmessung hingewiesen werden. Auf der Basis der hier diskutierten Ungleichheitsmaße erfolgt eine ordinale Messung von Ungleichheit. Einkommensverteilungen werden mit Hilfe der Prinzipien P.1–P.4 lediglich in eine — im besten Fall widerspruchsfreie — Rangfolge gebracht. Dies bedeutet aber, dass — ebenso wie bei der ordinalen Nutzenmessung — eine weitergehende Interpretation von Unterschieden in der gemessenen Ungleichheit nicht möglich ist. Wird beispielsweise beim Vergleich von Einkommensverteilungen im Zeitablauf ein Anstieg des Gini–Koeffizienten festgestellt, so deutet dies — im besten Fall, in dem Lorenz–Dominanz gegeben ist — lediglich auf eine Zunahme der Ungleichheit hin. Es ist dabei völlig unbedeutend, in welchem Ausmaß der Gini–Koeffizient angestiegen ist. Ein Ausweis von prozentualen Änderungen des Gini–Koeffizienten, wie er in manchen empirischen Arbeiten zu finden ist, verbietet sich daher von selbst, da er Interpretationen Vorschub leistet, die durch die hier diskutierten Prinzipien nicht gedeckt sind.

3.4 Ein kurzer Blick auf empirische Befunde

In diesem Abschnitt soll kurz demonstriert werden, dass die bisher beschriebenen Konzepte zur Messung von Ungleichheit und der oben als Ungleichheitsmaß diskutierte Gini–Koeffizient tatsächlich auch bei empirischen Untersuchungen Anwendung finden.

Tabelle 2 zeigt empirische Befunde zur Einkommensungleichheit in Deutschland, die von Hauser & Becker (2000) aus der Einkommens- und Verbrauchsstichprobe (EVS) ermittelt wurden. Es wurde hierbei die Einkommensungleichheit auf der Haushaltsebene ermittelt, wobei die Anmerkungen unter der Tabelle genauer erläutern, welche Abgrenzungen des Einkommensbegriffs dort verwendet wurden. Ausgewiesen werden hier als Ungleichheitsmaße sowohl der bereits diskutierte Gini–Koeffizient als auch der später noch genauer beschriebene Theil–Index. Wird zunächst lediglich der Gini–Koeffizient betrachtet, so fällt auf, dass die hierdurch gemessene Ungleichheit der Marktäquivalenzeinkommen — dies ist die so genannte Primärverteilung vor staatlichen Steuern und Transfers — im alten Bundesgebiet zwischen 1973 und 1988 zugenommen hat, wogegen von 1988 auf 1993 ein Rückgang der Ungleichheit festzustellen ist. Der Gini–Koeffizient der Markteinkommen liegt in diesen Jahren um einen Wert von 0.4, was ein für europäische Volkswirtschaften durchaus üblicher Wert ist. Der Blick auf den entsprechenden Gini–Koeffizienten der Nettoäquivalenzeinkommen — dies ist dann die so genannte Sekundärverteilung nach staatlichen Steuern und Transfers — zeigt nun, dass die Ungleichheit der Primärverteilung durch das redistributiv wirkende Steuer- und Transfersystem vermindert wird. Auch hier zeigt sich allerdings erst ab 1978 ein Anstieg der Ungleichheit.

Tabelle 2: *Empirische Befunde zur Einkommensungleichheit in Deutschland (entnommen aus: Hauser & Becker (2000))*

Table 2. Trends in the inequality of equivalent market income (pre-government income)[1] and equivalent net income (post-government income)[2,3], 1973 to 1993

Inequality Indicator	West Germany						East Germany
	resident foreigners						
	excluded					included	
	1973	1978	1983	1988	1993		
	Equivalent market income						
Gini coefficient	0.384	0.424	0.427	0.446	0.440	0.440	0.462
Theil index	0.438	0.533	0.538	0.571	0.526	0.526	0.605
	Equivalent net income						
Gini coefficient	0.248	0.247	0.250	0.253	0.267	0.269	0.199
Theil index[4]	0.100	0.100	0.103	0.106	0.117	0.118	0.065

Source: EVS-Databank (Income and Consumption Surveys); own calculations.

Notes: 1 Wage earnings, income from self-employment and property income (including imputed rent for owner-occupied housing) of the household, divided by the household's sum of equivalent weights; for the equivalence scale see footnote 3.
2 Market income plus transfer income (from government, from social insurance and from other private households) minus personal taxes and payroll taxes, divided by the household's sum of equivalent weights; for the equivalence scale see footnote 3.
3 The head of the household is weighted by 1.0; further household members older than 14 years are weighted by 0.7, children up to the age of 14 by 0.5.
4 Bottom-sensitive version of the Theil index (mean logarithmic deviation); see formula (2) in the Appendix.

Tabelle 3: *Gini–Koeffizienten der Verteilung des Nettogesamtvermögens für Deutschland (entnommen aus: 2. Armuts- und Reichtumsbericht der Bundesregierung (2002))*

	Gesamt	Früheres Bundesgebiet	Neue Länder
1993	0,665	0,625	0,718
1998	0,665	0,641	0,682
2003	0,675	0,657	0,671

Berücksichtigung von negativen Werten als Nullwerte.

Nochmals sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die in Tabelle 2 aufgeführten Änderungen des Gini–Koeffizienten quantitativ nicht interpretiert werden können. Aus der Tatsache, dass beispielsweise die Differenz der Gini–Koeffizienten zwischen 1973 und 1978 noch 0.04 ist, wogegen diese Differenz zwischen 1978 und 1983 nur noch 0.003 beträgt kann keinesfalls geschlossen werden, dass die Ungleichheit im letztgenannten Zeitraum weniger stark als im erstgenannten Zeitraum zugenommen hat.[3]

[3] Zusätzlich muss beachtet werden, dass es sich bei den in der Tabelle ausgewiesenen Gini–Koeffizienten um Stichprobenfunktionen handelt. Standardabeichungen, anhand derer sich beurteilen

Tabelle 3 zeigt schließlich empirische Befunde zur Vermögensverteilung in Deutschland, die dem 2. Armuts- und Reichtumsbericht der Bundesregierung aus dem Jahr 2002 entnommen sind. Abermals wird die Ungleichheit durch den Gini–Koeffizienten gemessen und es zeigt sich, dass die so gemessene Vermögensungleichheit zwischen 1993 und 2003 im alten Bundesgebiet zugenommen hat, wogegen sie im gleichen Zeitraum in den neuen Ländern abnahm. Im 2. Armuts- und Reichtumsbericht wird diese Entwicklung darauf zurückgeführt, dass die konjunkturelle Schwäche aufgrund ihrer Konsequenzen für die verfügbaren Erwerbseinkommen und die Ersparnis zwar allgemein eine zunehmende Konzentration der Vermögen begünstigt hat, diese Entwicklung in den neuen Ländern aber durch den dort stattfindenden wirtschaftlichen Aufholprozess überdeckt wurde.

Wird nun der Gini–Koeffizient für das gesamte Bundesgebiet betrachtet, ergibt sich aufgrund der oben beschriebenen unterschiedlichen Entwicklung in Ost- und Westdeutschland kein eindeutiges Bild. Dies verdeutlicht, dass es unter Umständen sinnvoll sein kann, Ungleichheitsmaße zu verwenden, die sich beispielsweise hinsichtlich des Beitrags von Subregionen zur gesamten Ungleichheit additiv zerlegen lassen. Für den Gini–Koeffizienten ist eine solche Zerlegung nicht möglich. Es ist also nicht möglich aus den Gini–Koeffizienten der Nettovermögensverteilung für Ost- und Westdeutschland in einfacher Weise auf den entsprechenden Gini–Koeffizienten für Gesamtdeutschland zu schließen. Ungleichheitsmaße, die additiv zerlegbar sind und dies leisten werden weiter unten diskutiert.

Abschließend soll an dieser Stelle noch auf die Tatsache hingewiesen werden, dass die Gini–Koeffizienten für die Vermögensverteilung generell größer ausfallen als die in Tabelle 2 ausgewiesenen entsprechenden Koeffizienten für die Einkommensverteilung. Dies ist ein für empirischer Befund, der durchaus Allgemeingültigkeit besitzt, lässt sich doch für alle entwickelten Volkswirtschaften beobachten, dass die Vermögensverteilung ungleicher ist als die Einkommensverteilung.

4 Soziale Wohlfahrtsfunktionen

In Abschnitt 2 wurde verdeutlicht, dass die vier Prinzipien der Skaleninvarianz, der Populationsinvarianz, der Anonymität bzw. Symmetrie und das Transferprinzip nicht ausreichen, um alle denkbaren Einkommensverteilungen in eine eindeutige Ordnung zu bringen. Dies ist nur möglich, wenn sich die mit den fraglichen Verteilungen assoziierten Lorenzkurven nicht schneiden, was a priori aber nicht ausgeschlossen werden kann. Um auch im Fall sich schneidender Lorenzkurven Aussagen über die Ungleichheit ableiten zu können, sind daher über die vier Prinzipien P.1–P.4 hinausgehende Werturteile erforderlich.

ließe, ob beispielsweise zwischen den Gini–Koeffizienten für die Jahre 1978 und 1983 ein signifikanter Unterschied besteht, werden hier nicht ausgewiesen.

Eine Strategie könnte darin bestehen, weitere Prinzipien für die Ungleichheitsmessung zu formulieren, bis auch für diese Zweifelsfälle eindeutige Aussagen getroffen werden können. Das Prinzip der Transfersensitivität ist ein Beispiel für eine solche Erweiterung. Dieses Prinzip stellt eine Erweiterung des oben beschriebenen Transferprinzips dar und verlangt, dass die Ungleichheit bei einem Transfer von einem reichen zu einem armen Individuum vergleichsweise um so stärker sinkt, je ärmer das den Transfer empfangende Individuum ist. Eine solche Strategie liefe letztlich auf eine axiomatische Begründung von Ungleichheitsmaßen hinaus, die zwar nicht unüblich ist (vgl. hierzu Cowell (2000)), hier jedoch nicht weiter dargestellt werden soll. Stattdessen wird im Weiteren ein auf dem Konzept der sozialen Wohlfahrtsfunktion basierender Ansatz gewählt. Durch das Unterstellen einer sozialen Wohlfahrtsfunktion werden implizit Werturteile getroffen, die interpersonelle Nutzenvergleiche ermöglichen. Die Idee ist nun, genau diese Werturteile auch heranzuziehen, um Aussagen über die Einkommensungleichheit abzuleiten. Demnach steht zunächst nicht die Ungleichheit per se im Fokus der Analyse, sondern die mit einer gegebenen Verteilung von Einkommens verbundene soziale Wohlfahrt. Wie sich allerdings herausstellen wird, besteht aber unter bestimmten Voraussetzungen eine enge Beziehung zwischen der Einkommensungleichheit, wie sie in Abschnitt 2 operationalisiert wurde, und der sozialen Wohlfahrt.

4.1 Eigenschaften sozialer Wohlfahrtsfunktionen

Eine soziale Wohlfahrtsfunktion aggregiert individuelle Nutzen in ein soziales Wohlfahrtsmaß. Werden die individuellen Nutzen mit u_i für $i = 1, \ldots, n$ bezeichnet und zunächst einmal offen gelassen, was den individuellen Nutzen bestimmt, so ergibt sich die soziale Wohlfahrt W aus einer sozialen Wohlfahrtsfunktion $W(\cdots)$ als:

$$W = W(u_1, \ldots, u_n) \tag{12}$$

Offensichtlich werden durch den Gebrauch einer soziale Wohlfahrtsfunktion wie (12) implizit Werturteile getroffen, da unterstellt wird, dass individueller Nutzen interpersonell vergleichbar ist.

Bei wohlfahrtsökonomischen Fragestellungen liegt neben einer sozialen Wohlfahrtsfunktion zudem üblicherweise eine Restriktion vor — die Nutzenmöglichkeitenmenge. Diese Menge beschreibt, welche individuellen Nutzenniveaus aufgrund gegebener Ressourcenbeschränkungen überhaupt erreichbar sind. Wird diese Menge mit U bezeichnet, ergibt sich das Wohlfahrtsoptimum als Lösung eines einfachen Optimierungsproblems:

$$\max_{u_i} \; W(u_1,\ldots,u_n)$$
$$\text{u. Nb.} \quad (u_1,\ldots,u_n) \in U$$

Hinsichtlich der sozialen Wohlfahrtsfunktion werden von Ökonomen üblicherweise die folgenden — mehr oder weniger restriktiven — Annahmen formuliert:

- **Nonpaternalismus:** Für die soziale Wohlfahrt sind lediglich die individuellen Nutzen — und nicht etwa die eines zentralen Planers o.ä. — ausschlaggebend.
- **Pareto–Prinzip:** Die soziale Wohlfahrt nimmt zu, wann immer — bei Konstanz der übrigen Nutzenniveaus — der Nutzen mindestens eines Individuums ansteigt. Die soziale Wohlfahrtsfunktion $W(u_1,\ldots,u_n)$ ist dann eine in allen Argumenten ansteigende Funktion.
- **Symmetrie:** Für die soziale Wohlfahrt ist nur die Höhe der individuellen Nutzen relevant, nicht jedoch welchen Individuen dieser Nutzen entsteht. Es gilt dann z.B. $W(u_1,\ldots,u_n) = W(u_n,\ldots,u_1)$.
- **Konkavität:** Die soziale Wohlfahrtsfunktion ist konkav, das heißt ausgewogenen Nutzenverteilungen werden gegenüber extremen Nutzenverteilungen bevorzugt:

$$W(u_1,\ldots,u_n) = W(u_1',\ldots,u_n') \Rightarrow$$
$$W(\theta u_1 + (1-\theta)\,u_1',\ldots,\theta u_n + (1-\theta)\,u_n') \geq W(u_1,\ldots,u_n), \quad \theta \in [0,1]$$

  In der Konkavität der sozialen Wohlfahrtsfunktion drückt sich letztlich implizit eine Aversion gegen Ungleichheit aus, die uns noch beschäftigen wird.

Eine spezielle soziale Wohlfahrtsfunktion ist die klassische utilitaristische soziale Wohlfahrtsfunktion, bei der additive Separabilität der Funktion W unterstellt wird:

$$W = W\,(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \tag{13}$$

Der utilitaristischen sozialen Wohlfahrtsfunktion (13) nach ist die soziale Wohlfahrt immer dann maximal, wenn die Summe der Individualnutzen maximiert wird, daher spricht man auch vom „größten Glück der größten Zahl“. Im Fall zweier Individuen sind die Indifferenzkurven einer utilitaristischen soziale Wohlfahrtsfunktion Geraden mit der Steigung -1. Abbildung 4 veranschaulicht dies. In der — hier nicht vorhandenen — Krümmung der Indifferenzkurven schlägt sich die Konkavität der sozialen Wohlfahrtsfunktion und damit die zugrundeliegende Ungleichheitsaversion nieder. Die utilitaristische soziale Wohlfahrtsfunktion ist zwar konkav aber nicht streng konkav, drückt daher also Neutralität gegenüber einer Ungleichverteilung der Nutzen aus. Wie eine gegebene Nutzensumme auf die Individuen verteilt wird, ist daher völlig unbedeutend für die soziale Wohlfahrt.

Auch wenn die Formulierung einer sozialen Wohlfahrtsfunktion wie (13) ad–hoc Charakter besitzt, so ist doch zumindest eine ökonomische Motivation für die utilitaristische soziale Wohlfahrtsfunktion möglich. Die utilitaristische soziale Wohlfahrtsfunktion lässt sich nämlich mit Hilfe des aus der Entscheidungstheorie bei Risiko bekannten Konzepts des Erwartungsnutzens motivieren:[4]

> *Harsanyi (1955) und der Schleier des Nichtwissens:* Zu diesem Zweck betrachten wir die modifizierte soziale Wohlfahrtsfunktion:
>
> $$W = W(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \tag{14}$$
>
> (14) ist äquivalent zu (13), da die soziale Wohlfahrtsfunktion invariant gegenüber monotonen Transformationen ist.
>
> Betrachten wir nun eine Gesellschaft, in der die möglichen Nutzenwerte $u_1 \ldots, u_n$ gegeben sind und nehmen wir an, dass ein Individuum von außerhalb in diese Gesellschaft einwandert, ohne a priori zu wissen, welchen dieser Nutzen es ex post erzielen wird. Es sei ihm lediglich bekannt, dass für jedes der n Nutzenniveaus die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit $1/n$ vorliegt. Vor dem Schleier dieses Nichtwissens („*veil of ignorance*“) weiß das Individuum also lediglich, dass es mit der Wahrscheinlichkeit $1/n$ jeweils eines der Nutzenniveaus $u_1, \ldots, u_n$ realisieren wird und sein Erwartungsnutzen ergibt sich als:
>
> $$\mathrm{E}[U] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \tag{15}$$

Eine weitere spezielle soziale Wohlfahrtsfunktion ist die so genannte Maximin–Funktion oder Rawls'sche soziale Wohlfahrtsfunktion (nach Rawls (1971)). Diese hat die Form:

$$W = W(u_1, \ldots, u_n) = \min\{u_1, \ldots, u_n\} \tag{16}$$

[4] Das Konzept des Erwartungsnutzen bzw. der von Neumann–Morgenstern Nutzenfunktion wird in weiterführenden Lehrbücher zur mikroökonomischen Theorie, beispielsweise bei Gravelle & Rees (2004), erläutert.

Abbildung 4: *Indifferenzkurven einer utilitaristischen sozialen Wohlfahrtsfunktion*

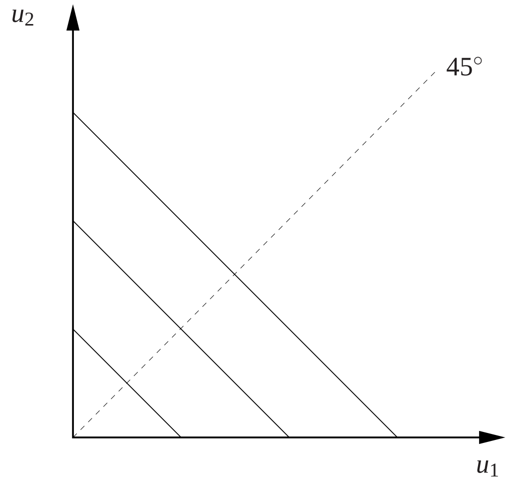
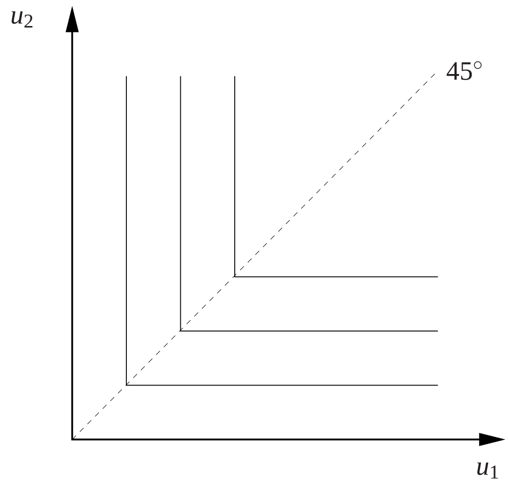
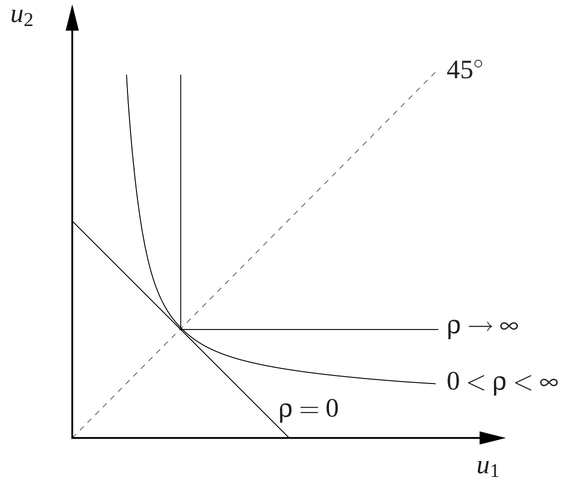


Abbildung 5: *Indifferenzkurven einer Rawls'schen sozialen Wohlfahrtsfunktion*



Die Rawls'sche soziale Wohlfahrtsfunktion impliziert, dass der Nutzen des am schlechtesten gestellten Individuums die soziale Wohlfahrt determiniert. Wie Abbildung 5 zeigt, haben die Indifferenzkurven einer sozialen Wohlfahrtfunktion von Rawls–Typ im Fall zweier Individuen eine L–förmige Gestalt. Diese Indifferenzkurven sind extrem gekrümmt, was letztlich eine extreme Ungleichheitsaversion und damit eine außerordentliche gesellschaftliche Präferenz für eine egalitäre Verteilung zum Ausdruck bringt.

Abbildung 6: *Indifferenzkurven einer verallgemeinerten utilitaristischen sozialen Wohlfahrtsfunktion*



Eine weitere Klasse sozialer Wohlfahrtsfunktionen, die die beiden zuvor beschriebenen als Spezialfälle enthält, ist die Klasse der verallgemeinerten utilitaristischen sozialen Wohlfahrtsfunktionen. Diese sozialen Wohlfahrtsfunktionen haben die Form:

$$W = W(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} g(u_i) \tag{17}$$

Hierbei ist $g(u_i)$ eine wachsende konkave Funktion. Von besonderem Interesse sind verallgemeinerte utilitaristische Wohlfahrtsfunktionen, bei denen die Funktion $g(u_i)$ eine konstante Elastizität aufweist. Die Funktion $g(u_i)$ hat in diesem Fall die Form:

$$g(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} u_i^{1-\rho} & \text{für } \rho \neq 1 \\ \ln u_i & \text{für } \rho = 1 \end{cases} \tag{18}$$

Für die soziale Wohlfahrtsfunktion ergibt sich daher:

$$W(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} \sum_{i=1}^{n} u_i^{1-\rho} & \text{für } \rho \neq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} \ln u_i & \text{für } \rho = 1 \end{cases} \tag{19}$$

Der Parameter ρ ist in diesem Fall ein Maß für die Ungleichheitsaversion bzw. die Krümmung der Indifferenzkurven. Für den Fall $\rho = 0$ ergibt sich aus (19) offensichtlich die utilitaristische Wohlfahrtsfunktion (13). Weniger offensichtlich ist, dass sich für $\rho \to \infty$ aus (19) die Rawls'sche Wohlfahrtsfunktion (16) ergibt. Für alle $0 < \rho < \infty$ verlaufen die Indifferenzkurven der verallgemeinerten utilitaristischen sozialen Wohlfahrtsfunktion zwischen den beiden Extremen der utilitaristischen und Rawls'schen sozialen Wohlfahrtsfunktion. Abbildung 6 veranschaulicht dies.

Werden soziale Wohlfahrtsfunktionen zur Beurteilung von Verteilungen herangezogen, so werden implizit interpersonelle Nutzenvergleiche angestellt. Die vorangegangenen Ausführungen haben gezeigt, dass sich die Art und Weise wie diese Nutzenvergleiche vorgenommen werden, bei der verallgemeinerten utilitaristischen Wohlfahrtsfunktion in der Krümmung der Indifferenzkurven der sozialen Wohlfahrtsfunktion bzw. der unterstellten Ungleichheitsaversion ausdrücken. Dies könnte nun die Vermutung nähren, dass sich durch die willkürliche Wahl einer sozialen Wohlfahrtsfunktion eine beliebige Ordnung von Verteilungen erzeugen ließe. Der nachfolgende Abschnitt wird indes zeigen, dass dem unter Umständen nicht so ist.

4.2 Ungleichheit und Wohlfahrt

Nach den eher allgemeinen Ausführungen über soziale Wohlfahrtsfunktionen im vorangegangenen Abschnitt, soll nun der Frage nachgegangen werden, inwieweit soziale Wohlfahrtsfunktionen herangezogen werden können, um Einkommensverteilungen zu beurteilen. Im Zentrum des Interesses steht hierbei nicht das nur schwer zu konkretisierende Konzept der Ungleichheit sondern die mit einer Einkommensverteilung verbundene soziale Wohlfahrt. Eine Verteilung wird demnach dann gegenüber einer anderen bevorzugt, wenn die mit ihr verbundene soziale Wohlfahrt größer ist. Eine hierbei besonders interessierende Frage ist, ob eine Reihung von Verteilungen, die sich an der sozialen Wohlfahrt orientiert, irgendetwas mit der Ungleichheit zu tun hat, wie sie oben durch die Prinzipien P.1–P.4 operationalisiert wurde und durch die vorgestellten Ungleichheitsmaße — insbesondere die Lorenzkurve — abgebildet wird.

Im Weiteren soll davon ausgegangen werden, dass stetige Einkommensverteilungen betrachtet werden. Die mit einer gegebenen Verteilung $F(y)$ von Einkommen verbundene soziale Wohlfahrt wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$W = \int u(y)\, f(y)\, dy \tag{20}$$

Hierbei ist $f(y)$ die Dichtefunktion der Einkommen und $u(y)$ ist der mit dem Einkommen y verbundene Nutzen, wobei $u'(y) > 0$ unterstellt wird. Die Nutzenfunktion (20) besitzt — wenn beachtet wird das durch das Integral in (20) letztlich einzelne Nutzen aufsummiert werden — Ähnlichkeit mit der oben betrachteten verallgemeinerten utilitaristischen Wohlfahrtsfunktion. In der Tat lässt sich die Wohlfahrtsfunktion (20) ebenso wie die utilitaristische Wohlfahrtsfunktion aus der Perspektive der Entscheidungstheorie bei Unsicherheit rechtfertigen: Es ist $\mathrm{E}[U] = \int u(y)\, f(y)\, dy$ der

Erwartungsnutzen eines Individuums mit der Nutzenfunktion $u(y)$ über eine Einkommenslotterie mit der Dichte $f(y)$ ist. Ungleichheitsaversion ist in diesem Fall gleichbedeutend mit Risikoaversion und schlägt sich in der strengen Konkavität der Funktion $u(y)$ nieder, so dass $u''(y) < 0$ gilt.

Nun könnte die Frage auftreten, ob nicht die Wahl einer spezifischen konkaven Nutzenfunktion $u(y)$ die resultierende Reihung alternativer Verteilungen nach der mit ihnen assoziierten Wohlfahrt beeinflusst. Zwei bedeutsame theoretische Resultate, die im Weiteren dargestellt werden, zeigen, wann dies nicht der Fall ist. Das erste Resultat geht auf Atkinson (1970) zurück:

Theorem 4.1 (Atkinson–Theorem) *Es seien $F_1(y)$ und $F_2(y)$ zwei Einkommensverteilungen, mit den Dichten $f_1(y)$ und $f_2(y)$ sowie den assoziierten Lorenzkurven $L_1(p)$ und $L_2(p)$. Sofern $\mu_{y,1} = \mu_{y,2}$, gilt:*

$$L_1(p) \geq L_2(p) \quad \textit{für alle } 0 \leq p \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int u(y) f_1(y)\, dy \geq \int u(y) f_2(y)\, dy$$

für alle Funktionen $u(y)$ mit $u'(y) > 0$ und $u''(y) < 0$.

Sofern also Verteilungen mit identischem Mittelwert verglichen werden, führt eine Beurteilung mittels sozialer Wohlfahrtsfunktionen unabhängig von deren exakter Gestalt zu denselben Schlussfolgerungen wie das Konzept der Lorenz–Dominanz. Dies bedeutet aber gleichzeitig, dass eine eindeutige Reihung von solchen Verteilungen unabhängig von der exakten Gestalt der Nutzenfunktion $u(y)$ nur dann möglich ist, wenn Lorenz–Dominanz vorliegt. Die mit der Wahl einer konkreten sozialen Wohlfahrtsfunktion implizit getroffenen Werturteile über interpersonelle Nutzenvergleiche sind in einem solchen Fall unbedeutend für die Reihung von Verteilungen. Im Fall sich schneidender Lorenzkurven jedoch ist eine solche von der konkreten Wohlfahrtsfunktion unabhängige Reihung nicht möglich.

Eine bedeutsame Einschränkung des Atkinson–Theorems ist, dass lediglich Aussagen über Verteilungen mit identischem Mittelwert getroffen werden. Jedoch lässt sich diese Einschränkung zumindest teilweise beseitigen. Zum einen gilt die Aussage des Atkinson–Theorems auch für den Fall, in dem die Lorenz–dominierende Verteilung einen größeren Mittelwert aufweist, also $\mu_{y,1} > \mu_{y,2}$ gilt. Die Begründung hierfür wird ebenso wie eine intuitive Begründung für das Atkinson–Theorem weiter unten, bei der Diskussion der Konzepte stochastischer Dominanz, geliefert. Zum anderen lässt sich die Aussage des Atkinson–Theorems erweitern, wenn anstelle der Lorenzkurven von Verteilungen deren verallgemeinerte Lorenzkurven betrachtet werden. Eine verallgemeinerte Lorenzkurve $GL(p)$ ergibt sich aus der Lorenzkurve $L(p)$ einer Verteilung durch Multiplikation mit dem Mittelwert μ_y der Einkommensverteilung:

$$GL(p) = \int_0^{F^{-1}(p)} y\, f(y)\, dy = \mu_y L(p)\,, \quad 0 \leq p \leq 1 \tag{21}$$

Ebenso wie die ursprüngliche Lorenzkurve ist die verallgemeinerte Lorenzkurve eine streng monoton wachsende Funktion. Darüber hinaus gilt $GL(0) = 0$ und $GL(1) = \mu_y$.

Es können nun auch dann Vergleiche angestellt werden, wenn die Mittelwertbedingung des Atkinson–Theorems nicht erfüllt ist und auch in einigen Fällen, in denen sich die Lorenzkurven zweier Verteilungen schneiden. Das entsprechende weitere Resultat, das auf dem Konzept der verallgemeinerten Lorenzkurve basiert, geht auf Shorrocks (1983) zurück:

Theorem 4.2 (Shorrocks–Theorem) *Es seien $F_1(y)$ und $F_2(y)$ zwei Einkommensverteilungen, mit den Dichten $f_1(y)$ und $f_2(y)$ sowie den assoziierten verallgemeinerten Lorenzkurven $GL_1(p)$ und $GL_2(p)$. Dann gilt:*

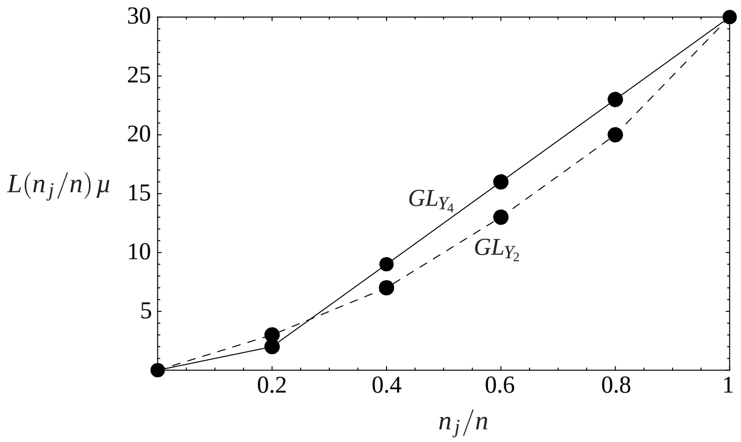
$$GL_1(p) \geq GL_2(p) \quad \text{für alle } 0 \leq p \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int u(y)\, f_1(y)\, dy \geq \int u(y)\, f_2(y)\, dy$$

für alle Funktionen $u(y)$ mit $u'(y) > 0$ und $u''(y) < 0$.

Wann immer sich die verallgemeinerten Lorenzkurven zweier Verteilungen nicht schneiden, führt eine Reihung dieser Verteilungen mit Hilfe sozialer Wohlfahrtsfunktionen vom Typ (20) unabhängig von der exakten Gestalt der Wohlfahrtsfunktion zum identischen Resultat, wonach die (im Sinne der verallgemeinerten Lorenzkurve) Lorenz–dominierende Verteilung eine höhere soziale Wohlfahrt aufweist. Die einzige Restriktion ist, dass die in der sozialen Wohlfahrtsfunktion auftretende Nutzenfunktion $u(y)$ streng konkav ist.

Auf eine wesentliche Implikation des Theorems von Shorrocks soll hier noch eingegangen werden. Wenn zwei Einkommensverteilungen Y und Y' verglichen werden, von denen die eine (Y') aus der anderen (Y) durch eine proportionale Erhöhung sämtlicher Einkommen hervorgegangen ist, so gilt für die beiden Verteilungen $L_Y(p) = L_{Y'}(p)$ und $GL_Y(p) < GL_{Y'}(p)$ für alle $p \in [0, 1)$. Auf der Grundlage der eingangs vorgestellten Prinzipien P.1–P.4 — insbesondere der Skaleninvarianz — würde nicht geschlussfolgert werden, dass sich die beiden Verteilungen hinsichtlich der Ungleichheit unterscheiden. Die Lorenzkurven beider Verteilungen sind identisch, Lorenz–Dominanz lässt sich nicht feststellen. Allerdings ergäbe sich in diesem Fall bezüglich der verallgemeinerten Lorenkurven eine (verallgemeinerte) Lorenz–Dominanz von Verteilung Y' gegenüber Y. Vor dem Hintergrund einer sozialen Wohlfahrtsfunktion (20) und dem Theorem von Shorrocks würde demnach gefolgert werden, dass Y' eine größere soziale Wohlfahrt bedingt als Y. Dies bedeutet nichts anderes, als dass bei einer Beurteilung von Verteilungen auf der Grundlage sozialer Wohlfahrtsfunktionen im Allgemeinen dem oben formulierten Prinzip P.1 der Skaleninvarianz nicht genügt wird. Letzteres ist nicht überraschend, da eine streng konkave Funktion $u(y)$ als Element der sozialen Wohlfahrtsfunktion bedingt, dass der Nutzen wächst, wenn das Einkommen steigt. Aufgrund der unterstellten

Abbildung 7: *Verallgemeinerte Lorenzkurven für die Einkommensverteilungen Y_2 und Y_4*



Ungleichheitsaversion folgt letztlich, dass ein proportionaler Anstieg der Einkommen nur dann zu einer Verminderung der Wohlfahrt führen kann, wenn er mit einer Zunahme der Ungleichverteilung der Einkommen einhergeht. Bei der Beurteilung von Einkommensverteilungen mit Hilfe soziale Wohlfahrtsfunktionen ist demnach neben den Einkommensanteilen, die den Einkommensbeziehern zufließen, auch die Höhe des gesamten zur Verteilung anstehenden Einkommens relevant. Insofern wird implizit ein Trade off zwischen der Größe des zur Verteilung anstehenden Kuchens („efficiency") und der Größe der einzelnen Kuchenstücke („equity") unterstellt.

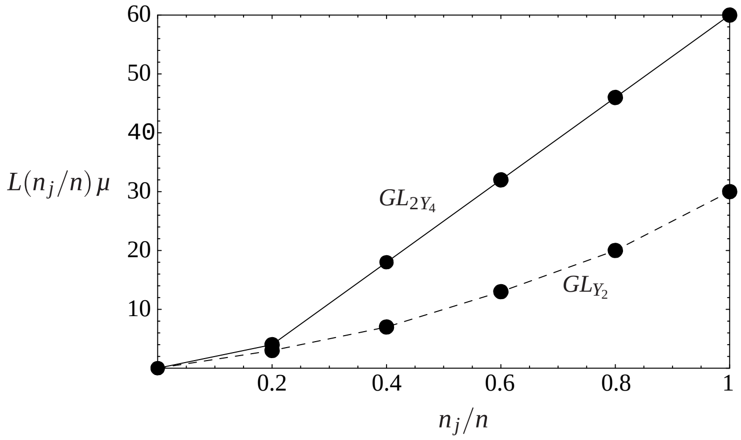
Hinsichtlich der oben in Tabelle 1 dargestellten Einkommensverteilungen Y_2 und Y_4 führt auch das Konzept der verallgemeinerten Lorenzkurve zu keiner eindeutigen Reihung dieser Verteilungen. Da die Durchschnittseinkommen beider Verteilungen identisch sind, schneiden sich — wie Abbildung 7 zeigt — auch die verallgemeinerten Lorenzkurven.

Wenn sich verallgemeinerte Lorenzkurven schneiden, können eindeutige Reihungen von Verteilungen mit Hilfe sozialer Wohlfahrtfunktionen nur unter weitergehenden Annahmen vorgenommen werden. Mitunter kann eine Einschränkung auf die Klasse sozialer Wohlfahrtsfunktionen, für die $u''' > 0$ gilt, eindeutige Reihungen ermöglichen. Derartige soziale Wohlfahrtsfunktionen genügen nicht nur dem Transferprinzip, sondern auch dem Prinzip der sinkenden Transfers (Transfersensitivität). Diesem Prinzip nach erhöht ein Transfer gegebener Größenordnung von einem reichen zu einem ärmeren Einkommensbezieher bei gegebener Einkommensdifferenz der Beteiligten die soziale Wohlfahrt um so mehr, je ärmer die am Transfer beteiligten Einkommensbezieher sind.

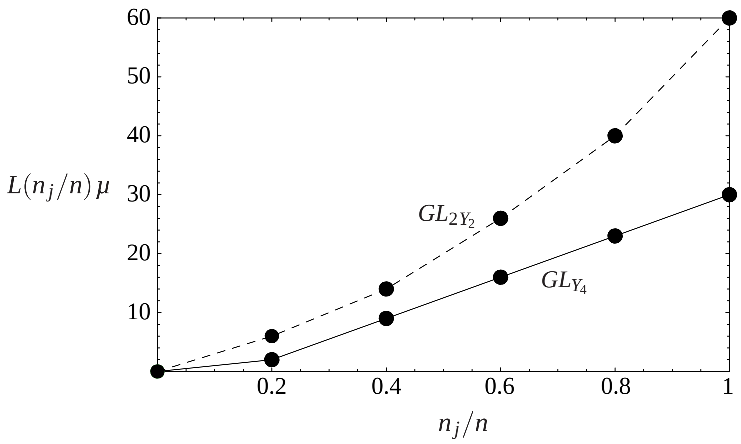
Auf das Prinzip der sinkenden Transfers soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden. Stattdessen soll hier abschließend nochmals veranschaulicht wer-

Abbildung 8: *Verallgemeinerte Lorenzkurven*

a) Y_2 vs. $2Y_4$



b) $2Y_2$ vs. Y_4



den, dass Beurteilungen von Ungleichheit mittels sozialer Wohlfahrtsfunktionen implizit einen Trade off zwischen der Höhe des gesamten zur Verteilung anstehenden Einkommens und den, den einzelnen Einkommensbeziehern zufließenden Einkommensanteilen unterstellt, da soziale Wohlfahrtsfunktionen nicht skaleninvariant sind.

Abbildung 8.a zeigt die verallgemeinerten Lorenzkurven der Verteilungen Y_2 und einer Verteilung, die sich aus Y_4 ergibt, wenn sämtliche Einkommen verdoppelt werden. Während dies aufgrund der Skaleninvarianz nichts an der Konfiguration der ursprünglichen Lorenzkurven ändert, ergibt sich nun bezüglich der verallgemeinerten Lorenzkurven eine Dominanz der modifizierten Verteilung $2Y_4$ gegenüber der Verteilung Y_2, so dass eine eindeutige Reihung dieser Verteilungen hinsichtlich der sozialen Wohlfahrt möglich ist. Demgegenüber zeigt 8.b die verallgemeinerten Lorenzkurven der Verteilungen Y_4 und der Verteilung, die sich ergibt, wenn sämtliche Einkommen der Verteilung Y_2 verdoppelt werden. Bezüglich der verallgemeinerten Lorenzkurve dominiert hier nun die Verteilung $2Y_2$ die Verteilung Y_4.

4.3 Der Atkinson–Index und das Atkinson–Maß

Der soeben beschriebene Trade off zwischen der Größe des zur Verteilung anstehenden Ganzen und dem Ausmaß der Ungleichverteilung auf die Individuen lässt sich gut mit Hilfe eines weiteren gebräuchlichen Ungleichheitsmaßes — dem Atkinson–Index — veranschaulichen.

Ausgangspunkt dieses Ungleichheitsmaßes ist wiederum die soziale Wohlfahrtsfunktion (20). Bei einer gegebenen, wieder als stetig unterstellten, Einkommensverteilung $F(y)$ — mit zugehöriger Dichte $f(y)$ — lässt sich mit Hilfe der Nutzenfunktion $u(y)$ das Einkommen y^G bestimmen, das bei einer egalitären Verteilung eine identische soziale Wohlfahrt generiert. Das Einkommen y^G ist daher folgendermaßen definiert:[5]

$$u(y^G) = \int u(y)\, f(y)\, dy$$

Strenge Konkavität der Funktion $u(y)$ unterstellend gilt $y^G < \mu_y = \int y f(y)\, dy$. Der Atkinson–Index I_A verwendet den Abstand des Einkommens y^G vom Mittelwert μ_y der Einkommen als Ungleichheitsmaß:

$$I_A = 1 - \frac{y^G}{\mu_y} \leq 1 \tag{22}$$

Bei einer egalitären Verteilung gilt $y^G = \mu_y$ und der Atkinson–Index nimmt den Wert Null an. Ein Atkinson–Index, der kleiner als Eins ist, zeugt von einer Ungleichverteilung der Einkommen.

Wird eine diskrete Verteilung $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ über n Individuen betrachtet und für diese Individuen eine jeweils identische CRRA–Nutzenfunktion $u(y_i)$ der Form

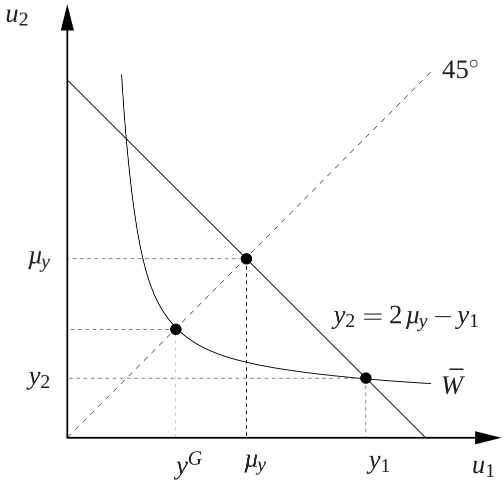
$$u(y_i) = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} y_i^{1-\rho} & \text{für } \rho \neq 1 \\ \ln y_i & \text{für } \rho = 1 \end{cases} \tag{23}$$

unterstellt, so ergibt sich das Einkommen y^G als:

$$y^G = \begin{cases} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^{1-\rho}\right)^{1/(1-\rho)} & \text{für } \rho \neq 1 \\ \exp\left(\frac{1}{n} \ln y_i\right) & \text{für } \rho = 1 \end{cases} \tag{24}$$

[5] Es handelt sich bei y^G um das aus der Entscheidungstheorie bei Unsicherheit bekannte Sicherheitsäquivalent.

Abbildung 9: *Der Atkinson–Index im Fall zweier Individuen*



Der in diesem speziellen Fall resultierenden Atkinson–Index wird auch als Atkinson–Maß (I_M) bezeichnet:

$$I_M(Y) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{1-\rho}\right)^{1/(1-\rho)}}{\mu_y}, \quad \rho \neq 1 \tag{25}$$

Auf die für diese spezifische Nutzenfunktion ermittelte Darstellung des Atkinson–Index in Gleichung (25) wird bei der späteren Diskussion der verallgemeinerten Entropiemaße nochmals eingegangen werden.

5 Stochastische Dominanz und Ungleichheitsmessung

5.1 Stochastische Dominanz 1. und 2. Grades

Die Konzepte der stochastischen Dominanz definieren Rangordnungen von Verteilungen. Das besondere an diesen Konzepten ist, dass eine enge Beziehung dieser Rangordnungen zu Präferenzordnungen von Individuen mit von Neumann–Morgenstern Nutzenfunktionen (Erwartungsnutzen) über diese Verteilungen besteht.

Zur Konkretisierung werden im Weiteren zwei Einkommensverteilungen $F_1(y)$ und $F_2(y)$ betrachtet. $\tilde{y}$ ist ein beliebiges Einkommensniveau, das größer ist als das höchste in den beiden Verteilungen jeweils auftretende Einkommen.

Zunächst zum Konzept der stochastischen Dominanz 1. Ordnung, wonach eine Verteilung $F_1(y)$ eine anderen Verteilung $F_2(y)$ dominiert, wenn $F_1(y)$ tendenziell höhere Realisationen (im vorliegenden Fall des Einkommens) verspricht.

Definition 5.1 (Stochastische Dominanz 1. Grades) *Die Verteilung $F_1(y)$ dominiert die Verteilung $F_2(y)$ im Sinne stochastischer Dominanz 1. Grades, wenn gilt:*

$$F_1(y) \leq F_2(y) \quad \textit{für alle } y \in [0, \tilde{y}]$$

Stochastische Dominanz 1. Grades von $F_1(y)$ gegenüber $F_2(y)$ liegt demnach vor, wenn die Verteilungsfunktion $F_1(y)$ generell unterhalb der Funktion $F_2(y)$ verläuft. Ein solcher Fall ist in Abbildung 10.a dargestellt.

Es lässt sich zeigen, dass der Erwartungsnutzen einer Verteilung, die eine andere Verteilung im Sinne stochastischer Dominanz 1. Grades dominiert, für alle nicht fallenden Nutzenfunktionen $u(y)$ größer ist. Konkret gilt:

Theorem 5.1 *Es sei $u(y)$ eine beliebige Nutzenfunktion mit $u'(y) \geq 0$. Dann gilt:*

$$F_1(y) \leq F_2(y) \; \forall y \in [0, \tilde{y}] \quad \Leftrightarrow \quad \int u(y)\, f_1(y)\, dy \geq u(y)\, f_2(y)\, dy$$

Stochastische Dominanz 1. Grades von $F_1(y)$ gegenüber $F_2(y)$ ist demnach äquivalent dazu, dass der mit $F_1(y)$ verbundene Erwartungsnutzen eines Individuums mit einer Nutzenfunktion, deren Grenznutzen strikt positiv ist, größer als der mit $F_2(y)$ verbundene Erwartungsnutzen ist. Zum Beweis dieser Aussage wenden wir die Produktregel der Integration auf den Erwartungsnutzen an. Es ergibt sich dann:

$$\int_0^{\tilde{y}} u(y)\, f_1(y)\, dy = [u(\tilde{y})F_1(\tilde{y}) - u(0)\, F_1(0)] - \int_0^{\tilde{y}} u'(y) F_1(y)\, dy$$
$$\int_0^{\tilde{y}} u(y)\, f_2(y)\, dy = [u(\tilde{y})F_2(\tilde{y}) - u(0)\, F_2(0)] - \int_0^{\tilde{y}} u'(y) F_2(y)\, dy$$

Wegen $F_1(\tilde{y}) = F_2(\tilde{y}) = 1$ und $F_1(0) = F_2(0) = 0$ ergibt sich daher:

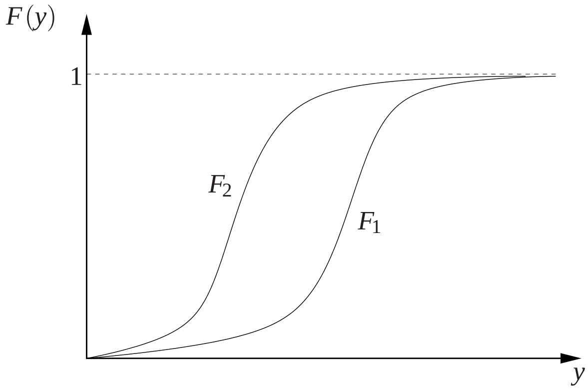
$$\int_0^{\tilde{y}} u(y)\, f_1(y)\, dy - \int_0^{\tilde{y}} u(y)\, f_2(y)\, dy = \int_0^{\tilde{y}} u'(y)\, [F_2(y) - F_1(y)]\, dy \qquad (26)$$

Stochastische Dominanz 1. Grades impliziert, dass der in (26) in eckigen Klammern stehende Term nicht negativ ist. Zusammen mit der Annahme $u'(y) \geq 0$ ergibt sich dann Theorem 5.1.

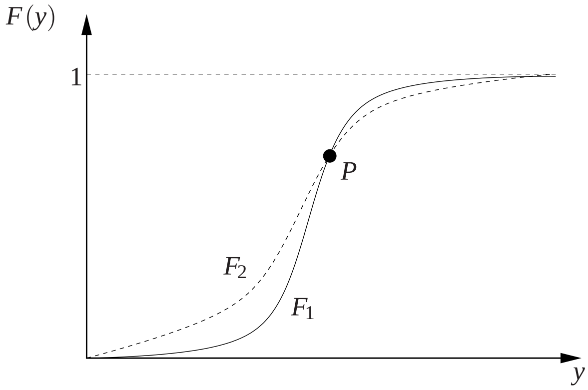
Das auf dem Konzept der stochastischen Dominanz 1. Grades basierende Theorem 5.1 berücksichtigt lediglich, dass die zugrundeliegende Nutzenfunktion einen grundsätzlich nicht negativen Grenznutzen aufweist. Wird Risikoaversion, also die Konkavität der Nutzenfunktion berücksichtigt, sind Aussagen über den Risikogehalt von Verteilungen erforderlich, um eine Präferenzordnung zu erstellen. Die Grundlage für den Vergleich des Risikogehalts zweier Verteilungen liefert das Konzept der stochastischen Dominanz zweiten Grades:

Abbildung 10: *Stochastische Dominanz*

a) Stochastische Dominanz 1. Grades



b) Stochastische Dominanz 2. Grades



Definition 5.2 (Stochastische Dominanz 2. Grades) *Die Verteilung $F_1(y)$ dominiert die Verteilung $F_2(y)$ im Sinne stochastischer Dominanz 2. Grades, wenn gilt:*

$$\int_0^x F_1(y)\,dy \leq \int_0^x F_2(y)\,dy \quad \textit{für alle } x \in [0,\tilde{y}]$$

Stochastische Dominanz 2. Ordnung von $F_1(y)$ gegenüber $F_2(y)$ liegt demnach beispielsweise dann vor, wenn stochastische Dominanz 1. Grades gegeben ist, ist aber allgemeiner. Abbildung 10.b veranschaulicht stochastische Dominanz 2. Grades einer Verteilung $F_1(y)$ gegenüber einer Verteilung $F_2(y)$ für den Fall, dass sich diese Verteilungsfunktionen einmal schneiden. Grafisch zeigt sich stochastische Dominanz 2. Grades von $F_1(y)$ gegenüber $F_2(y)$ in diesem Fall daran, dass die Fläche zwischen den beiden Verteilungen links vom Schnittpunkt P größer ist, als die entsprechende Fläche rechts von P.

In Analogie zu Theorem 5.1 lässt sich nun zeigen, dass der Erwartungsnutzen einer Verteilung, die eine andere Verteilung im Sinne stochastischer Dominanz 2. Grades dominiert, für alle nicht fallenden, konkaven Nutzenfunktionen $u(y)$ größer ist:

Theorem 5.2 *Es sei $u(y)$ eine beliebige Nutzenfunktion mit $u'(y) \geq 0$ und $u''(y) \leq 0$. Dann gilt:*

$$\int_0^x F_1(y)\,dy \leq \int_0^x F_2(y)\,dy\ \forall y \in [0,\tilde{y}] \quad \Leftrightarrow \quad \int u(y)\,f_1(y)\,dy \geq u(y)\,f_2(y)\,dy$$

Zeigen lässt sich dies, indem die zunächst die folgende Funktion $S_i(x)$ für $i = 1,2$ definiert wird:

$$S_i(x) = \int_0^{\tilde{x}} F_i(y)\,dy \quad \text{für } i = 1,2$$

Es gilt dann $S_i(\tilde{y}) = \tilde{y} - \mu_i$ sowie $S_i(0) = 0$. Wird nun nochmals die Produktregel der Integration auf (26) angewendet, resultiert:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tilde{y}} u(y)\,f_1(y)\,dy - \int_0^{\tilde{y}} u(y)\,f_2(y)\,dy &= \int_0^{\tilde{y}} u'(y)\,[F_2(y) - F_1(y)]\,dy \\
&= u'(\tilde{y})\,[S_2(\tilde{y}) - S_1(\tilde{y})] - u'(0)\,[S_2(0) - S_1(0)] \\
&\quad - \int_0^{\tilde{y}} u''(y)\,[S_2(y) - S_1(y)]\,dy \\
&= u'(\tilde{y})\,[S_2(\tilde{y}) - S_1(\tilde{y})] \\
&\quad - \int_0^{\tilde{y}} u''(y)\,[S_2(y) - S_1(y)]\,dy \qquad (27)
\end{aligned}$$

Der erste Term in (27) ist wegen $u'(y) \geq 0$ und $S_2(\tilde{y}) - S_1(\tilde{y}) \geq 0$ nicht negativ. Stochastische Dominanz 2. Grades impliziert zudem, dass der in (27) unter dem Integral in Klammern stehende Term nicht negativ ist. Zusammen mit $u''(y) \leq 0$ ergibt sich daraus, dass das Integral selbst nicht positiv ist, so dass die gesamte rechte Seite von (27) nicht negativ ist.

5.2 Stochastische Dominanz und Lorenz–Dominanz

Das Konzept der stochastischen Dominanz kann nun genutzt werden, um die oben beschriebenen Theoreme von Atkinson und Shorrocks zu beweisen. Der hierzu erforderliche letzte Schritt besteht lediglich darin, eine Äquivalenz zwischen stochastischer Dominanz 2. Grades und der Lorenz–Dominanz bezüglich verallgemeinerter Lorenzkurven zu etablieren.

Theorem 5.3 *(***Lorenz–Dominanz und stochastische Dominanz 2. Grades)** *Es seien $F_1(y)$ und $F_2(y)$ zwei Verteilungen, deren verallgemeinerte Lorenzkurven durch $GL_1(p)$ und $GL_2(p)$ für $p \in (0,1)$ gegeben sind. Dann gilt:*

$$\int_0^x F_1(y)\,dy \leq \int_0^x F_2(y)\,dy\ \forall x \in [0,\tilde{y}] \quad \Leftrightarrow GL_1(p) \geq GL_2(p)\ \forall p \in (0,1)$$

Das Theorem von Shorrocks ergibt sich nun unmittelbar aus den Theoremen 5.2 und 5.3. Wird berücksichtigt, dass das Theorem von Atkinson in diesem als Spezialfall zweier Verteilungen mit gleichem Mittelwert enthalten ist, ist damit auch dieses Theorem bewiesen.

6 Weitere Aspekte der Ungleichheitsmessung

6.1 Zerlegung von Ungleichheitsmaßen

Bei der bisherigen Betrachtung von Ungleichheitsmaßen stand die Frage im Vordergrund, inwieweit die jeweiligen Maße tatsächlich das messen, was unter Ungleichheit verstanden werden soll bzw. welche impliziten Werturteile bei der Ungleichheitsmessung getroffen werden. Rein praktische Erwägungen können aber auch herangezogen werden, um wünschenswerte Eigenschaften von Ungleichheitsmaßen zu formulieren. Eine mitunter wichtige Eigenschaft eines Ungleichheitsmaßes ist seine Zerlegbarkeit. Zur Charakterisierung der Zerlegbarkeit sei eine Einkommensverteilung über Einkommensbezieher betrachtet, die sich hinsichtlich bestimmter anderer Merkmale (z.B. Geschlecht, Alter, Region) unterscheiden. Ein Ungleichheitsmaß ist dann zerlegbar, wenn sich die gemessene Ungleichheit allein aus der Anzahl der Mitglieder der Subpopulationen, den jeweiligen Durchschnitteinkommen und den jeweiligen Ungleichheitsmaßen für die Subpopulationen errechnen lässt. Ein Maß ist additiv zerlegbar, wenn es als gewichtete Summe der Ungleichheitsmaße für die Subpopulationen und additiven Termen, die die Ungleichheit zwischen den Subpopulationen messen und dabei lediglich von den jeweiligen Durchschnittseinkommen und der Anzahl der Mitglieder der Subpopulationen abhängen, darstellbar ist. Keines der bisher vorgestellten Ungleichheitsmaße ist additiv zerlegbar. Einzig der Atkinson–Index ist zumindest zerlegbar.

Wie sich zeigen lässt, müssen Ungleichheitsmaße, die neben den Prinzipien P.1–P.4 auch additiv zerlegbar sein sollen, zur Familie der verallgemeinerten Entropiemaße gehören. Zerlegbarkeit ergibt sich für die Klasse von Ungleichheitsmaßen, die monotone Transformationen verallgemeinerter Entropiemaße sind. Letztgenannter Klasse gehört — das wird unten noch gezeigt werden — das Atkinson–Maß an (vgl. hierzu Lambert (1989)).

6.2 Der Theil–Index und andere Entropiemaße

Entropiemaße sind allgemeine Maße für den Grad der Ordnung bzw. Unordnung von physikalischen oder auch ökonomischen Systemen. Ein spezielles, im Zusammenhang mit Ungleichheitsmessung relevantes Entropiemaß ist der Theil–Index. Im Fall einer diskreten Einkommensverteilung $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ergibt sich der Theil–Index als:

$$T(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\mu_y} \ln(y_i/\mu_y) \tag{28}$$

Im Fall einer egalitären Verteilung nimmt der Theil–Index den Wert 0 an. Fließt das gesamte Einkommen einem einzigen Einkommensbezieher zu, ergibt sich für den Theil–Index ein Wert von $\ln(n)$. Empirische Befunde zum Theil–Index finden sich in Tabelle 2 auf Seite 16. Hinsichtlich der Entwicklung der Einkommensungleichheit gibt der Theil–Index das wieder, was bereits anhand des Gini–Koeffizienten festgestellt und diskutiert wurde.

Wird angenommen, dass sich die Einkommensbezieher dieser Einkommensverteilung in m Subpopulationen mit jeweils n_j Einkommensbeziehern und den jeweiligen Durchschnittseinkommen μ_j für $j = 1, \ldots, m$ unterteilen lassen, so ergibt sich der Theil–Index für die gesamte Verteilung aus den Theil–Indizes T_j für die $j = 1, \ldots, m$ Subpopulationen wie folgt:

$$T(Y) = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j \mu_j}{n \mu_y} T_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{n_j \mu_j}{n \mu_y} \ln\left(\frac{\mu_j}{\mu_y}\right) \tag{29}$$

Die Klasse der verallgemeinerten Entropiemaße E_β schließlich wird durch einen Parameter β charakterisiert:

$$E_\beta(Y) = \frac{1}{\beta^2 - \beta} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{\mu_y} \right)^{\beta} - 1 \right], \quad \beta > 0 \tag{30}$$

Für $\beta = 1$ ergibt sich aus (30) dann der Theil–Index, so dass $E_1(Y) = T(Y)$. Wie der folgende Satz zeigt, bilden die verallgemeinerte Entropiemaße eine besondere Klasse von Ungleichheitsmaßen.

Satz 6.1 (Zerlegbare Ungleichheitsmaße) *Alle Ungleichheitsmaße, die den Prinzipien P.1–P.4 genügen und darüber hinaus zerlegbar sind, sind ordinal äquivalent zu verallgemeinerten Entropiemaßen gemäß* (30).

Ordinale Äquivalenz meint hierbei, dass diese Maße jeweils eine identische Reihung von Verteilung hinsichtlich ihrer Ungleichheit vornehmen. Jedes zerlegbare Maß muss sich demnach als monotone Transformation von E_β für irgendein β darstellen lassen.

Für das oben dargestellte Atkinson–Maß ist dies möglich, denn für $\beta = 1 - \rho$ folgt aus (30):

$$E_{1-\rho}(Y) = \frac{1}{-\rho(1-\rho)} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{\mu_y} \right)^{1-\rho} - 1 \right]$$

Ein Vergleich mit (25) zeigt dann, dass das oben definierte Atkinson–Maß $I_M(Y)$ ordinal äquivalent zum verallgemeinerten Entropiemaß mit $\beta = 1 - \rho$ ist

$$1-\left[\rho(\rho-1)E_{1-\rho}(Y)+1\right]^{\frac{1}{1-\rho}}=1-\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^{1-\rho}}{\mu_y}=I_M(Y) \tag{31}$$

7 Armutsmessung

Neben der Messung der Ungleichheit bei der die gesamte Einkommens- und Vermögensverteilung betrachtet wird, kann auch die Erfassung und Beschreibung von Armut im Zentrum des Interesses stehen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn beispielsweise sozialpolitische Maßnahmen beurteilt werden sollen, deren Ziel die Bekämpfung oder Beseitigung von Armut ist.

Ebenso wie bei der Ungleichheitsmessung ist auch bei der Armutsmessung das Treffen von Werturteilen unvermeidbar, denn es muss ja zunächst einmal festgelegt werden, anhand welcher Kriterien ein bestimmter Anteil von Einkommensbeziehern oder Vermögensbesitzern als arm zu klassifizieren ist.

7.1 Definition von Armut

Das zentrale Konzept der Armutsmessung ist die so genannte Armutsschwelle. Bezeichnet S beispielsweise die für das Einkommen festgelegte Armutsschwelle gilt jeder Haushalt i als einkommensarm, für dessen Einkommen $y_i \leq S$ gilt. Der Begriff der Armut wird somit durch die Vorgabe der Armutsschwelle S definiert, wobei grundsätzlich sowohl eine absolute Armutsschwelle (z.B. ein festgelegter Betrag, der als Existenzminimum angesehen wird) als auch eine relative Armutsschwelle (festgelegt, z.B. in Relation zum Durchschnitts- oder Medianeinkommen) vorgegeben werden kann. Absolute Armutsschwellen sind im Zusammenhang mit der Armutsmessung in Entwicklungsländern gebräuchlich. So ist nach der offiziellen Definition der Weltbank ein Individuum dann arm, wenn es weniger als einen PPP-Dollar pro Tag zur Verfügung hat.[6] Untersuchungen zur Armut in Deutschland gehen häufig von einer relativen Armutsschwelle aus und klassifizieren als arm, wer weniger als 60% des Medianeinkommens bezieht.[7] Generell lässt sich festhalten, dass sowohl die Vorgabe einer absoluten als auch die einer relativen Armutsschwelle letztlich nicht frei von Willkür ist.

[6] Der PPP–Dollar („purchasing power parity“) wird verwendet, um pro Kopf Einkommen verschiedener Länder vergleichbar zu machen. Eine bloße Umrechnung mit dem Wechselkurs würde Unterschiede in der Kaufkraft verschiedener Länder ignorieren.

[7] Dies ist die mittlerweile in Europa gängige Definition von Armut.

Tabelle 4: *Armutsrisiko und Armutslücke in Deutschland (entnommen aus: 2. Armuts- und Reichtumsbericht der Bundesregierung (2002))*

Armutsrisikoquoten und Armutslücke[1)]

Statistische Maßzahl	Deutschland		Alte Länder		Neue Länder	
	1998	2003	1998	2003	1998	2003
40% des Medianeinkommens	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	(2,0)
60% des Medianeinkommens	12,1	13,5	11,0	12,2	17,1	19,3
Fiktive Quote vor öffentlichen Transfers[2)]	38,5	41,3	34,9	38,2	54,1	55,1
Armutslücke[3)]	15,5	16,0	16,2	16,4	14,6	14,6

1) Werte beziehen sich auf Berechnungen mit der neuen OECD-Skala und für die Gebietsteile jeweils auf den gesamtdeutschen Mittelwert.
2) Alle öffentlichen Transfers einschließlich gesetzlicher Renten und Pensionen.
3) Die ausgewiesenen Werte beziehen sich auf die 60%-Mediangrenze.

7.2 Einige gebräuchliche Armutsmaße

Ebenso wie Ungleichheitsmaße hinsichtlich der Ungleichheit haben Armutsmaße die Aufgabe, das Ausmaß der Armut in einem möglichst einfachen Index zu komprimieren.

Ein einfaches Armutsmaß besteht darin, schlicht die relative Anzahl der Einkommensbezieher zu zählen, die die Armutschwelle unterschreiten. Bei einer vorgegebenen Armutsschwelle S und einer stetigen Einkommensverteilung $F(y)$ führt dies zum relativen Headcount–Index bzw. zur Armutsrisikoquote R_S:

$$R_S = F(S)$$

Ein solcher Index berücksichtigt nicht, wie weit die als arm klassifizierten Einkommensbezieher jeweils von der Armutsschwelle S entfernt sind. Diese ist beim Armutslückenindex A_S der Fall, der diese Information berücksichtigt und die Summe der relativen Abstände der armen Einkommen zur Armutsschwelle misst:

$$A_S = \int_0^S \left(1 - \frac{y}{S}\right) f(y)\, dy$$

Der Armutslückenindex gehört zur Klasse der Foster'schen Armutsmaße (Foster et al. (1984)). Diese Maße werden durch einen Parameter α charakterisiert und sind folgendermaßen definiert:

$$F_{S,\alpha} = \int_0^S \left(1 - \frac{y}{S}\right)^{\alpha} f(y)\, dy, \quad \alpha > 0$$

Es ist offensichtlich, dass $F_{S,1} = A_S$ gilt.

Was die Klasse der Foster'schen Armutsmaße interessant macht, ist dass sie unter gewissen Umständen Aussagen erlauben, die unabhängig von einer spezifi-

Tabelle 5: *Armutsrisiko differenziert nach sozioökonomischen Charakteristika (entnommen aus: 2. Armuts- und Reichtumsbericht der Bundesregierung (2002))*

Gruppenspezifische Armutsrisikoquoten[1)]in % in Deutschland nach Geschlecht, Alter, Erwerbsstatus und Haushaltstypen

Bevölkerungsgruppe	Neue OECD-Skala		Alte OECD-Skala	
	1998	2003	1998	2003
Differenzierung nach Geschlecht				
Männer	10,7	12,6	11,6	12,9
Frauen	13,3	14,4	12,6	13,3
Differenzierung nach Alter				
bis 15 Jahre	13,8	15,0	18,6	18,6
16 bis 24 Jahre	14,9	19,1	14,6	19,0
25 bis 49 Jahre	11,5	13,5	12,3	13,5
50 bis 64 Jahre	9,7	11,5	7,7	9,8
65 und mehr Jahre	13,3	11,4	9,3	7,5
Differenzierung nach Erwerbsstatus[2)]				
Selbstständige(r)	11,2	9,3	11,2	9,6
Arbeitnehmer(in)	5,7	7,1	5,9	6,8
Arbeitslose(r)	33,1	40,9	31,2	37,4
Rentner(in)/Pensionär(in)	12,2	11,8	8,4	7,8
Personen in Einpersonenhaushalten				
Insgesamt	22,4	22,8	13,7	14,1
Männer	20,3	22,5	13,8	15,0
Frauen	23,5	23,0	13,7	13,6
Personen in Haushalten mit Kind(ern)[3)]				
Allein Erziehende	35,4	35,4	37,0	36,4
2 Erwachsene mit Kind(ern)	10,8	11,6	14,6	14,6
Armutsrisikoquote insgesamt	12,1	13,5	12,1	13,1

1) Armutsrisikogrenze 60% des Medians der laufend verfügbaren Äquivalenzeinkommen.
2) Nur Personen im Alter ab 16 Jahren.
3) Kinder: Personen unter 16 Jahren sowie Personen von 16 bis 24 Jahren, sofern sie nichterwerbstätig sind und mindestens ein Elternteil im Haushalt lebt.

schen Armutsschwelle sind. So lässt sich für $\alpha = 2$ folgendes zeigen: Für jede soziale Wohlfahrtsfunktion der Form (20) mit $u' > 0, u'' < 0$ und $u''' > 0$ (die also dem Prinzip der Transfersensitivität genügt) und zwei Verteilungen $F_1(y)$ und $F_2(y)$ gilt (vgl. Foster et al. (1984)):

$$\mu_1 \geq \mu_2 \text{ und } \int_0^S \left(1 - \frac{y}{S}\right)^2 f_1(y)\,dy < \int_0^S \left(1 - \frac{y}{S}\right)^2 f_2(y)\,dy \text{ für alle } S \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \int u(y)\,f_1(y)dy > \int u(y)\,f_2(y)\,dy \quad (32)$$

Für den Fall, dass der Mittelwert der Verteilung F_1 größer ist als derjenige der Verteilung F_2, impliziert demnach ein geringerer Armutslückenindex immer eine größere soziale Wohlfahrt, sofern das Maß $F_{S,2}$ für den Armutslückenindex verwendet wird und die Klasse der sozialen Wohlfahrtsfunktionen auf solche eingeschränkt wird, die dem Prinzip der Transfersensitivität genügen. Es besteht also ein — wenn auch nicht ganz offensichtlicher — Zusammenhang zwischen den hier dargestellten Konzepten zur Armutsmessung und dem klassischen ökonomischen Konzept der sozialen Wohlfahrt.

Tabelle 4 zeigt die Entwicklung der Armutsrisikoquote und der Armutslücke in Deutschland. Je nachdem, welcher Wert (40 oder 60% des Medianeinkommens) als relative Armutsschwelle unterstellt wird, zeigt sich entweder keine Änderung der Armut oder aber deren Zunahme. Besonders hervorzuheben ist die vierte Zeile der Tabelle. Sie zeigt die Armutsrisikoquote, die sich ohne öffentliche Transfers, also ohne sozialstaatliche Umverteilungsmaßnahmen ergeben hätte. Staatliche Umverteilung senkt demnach das Armutsrisiko in nicht unbeträchtlichem Ausmaß und ist auch für die im Zeitablauf relative Konstanz der Armutsquote verantwortlich. Tabelle 5 zeigt Armutsrisikoquoten differenziert nach sozioökonomischen Charakteristika. Hier zeigt sich — vielleicht nicht ganz überraschend —, dass insbesondere Arbeitslosigkeit ein hohes Armutsrisiko bedingt. Ebensolches lässt sich für allein Erziehende feststellen.

8 Ungleichheit bei parametrisch spezifizierten Verteilungsfunktionen

8.1 Nützlichkeit parametrisch spezifizierte Verteilungen

Insbesondere bei modelltheoretischen Arbeiten, die sich mit Verteilungsaspekten befassen, aber auch bei der formal analytischen Betrachtung von Ungleichheitsmaßen ist es mitunter notwendig oder zumindest sinnvoll die zugrundeliegende Verteilung parametrisch zu spezifizieren.

Vor dem Hintergrund entsprechender empirischer Befunde kommen für Untersuchungen, die sich mit Einkommens- oder Vermögensungleichheit befassen, von den aus der mathematischen Statistik bekannten Verteilungen hierfür zwei Verteilungen in Frage. Zum einen die Lognormalverteilung, deren einfache Handhabbarkeit formale Analyse mitunter überhaupt erst möglich macht. In der Tat sind empirisch ermittelte Verteilungen von Einkommen oder Vermögen in der Regel linkssteil, was sich durch eine Lognormalverteilung häufig gut approximieren lässt. Zum anderen die Pareto–Verteilung, die ebenfalls leicht handhabbar ist und die insbesondere den oberen Rand empirischer Verteilungen gut approximiert. Beide Verteilungen sollen im Weiteren mit ihren Implikationen für die bisher diskutierten Ungleichheitsmaße kurz dargestellt werden.

8.2 Die Lognormalverteilung

Eine Zufallsvariable y folgt einer Lognormalverteilung, $y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$, wenn der Logarithmus von y der Normalverteilung folgt, so dass $\ln y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Die Dichtefunktion einer lognormalverteilten Zufallsvariablen y lautet:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\, y} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0 \tag{33}$$

Abbildung 11 zeigt am Beispiel der Dichtefunktion einer Lognormalverteilung mit $\mu = 2$ und $\sigma_2^2 = 0.5$, dass es sich bei dieser Verteilung um eine linkssteile Verteilung handelt. Abgesehen davon, dass sich die Lognormalverteilung aufgrund dieser Eigenschaft gut zur Approximation empirisch beobachtbarer Einkommens- bzw. Vermögensverteilungen eignet, lässt sich auch eine einfache ökonomische Begründung für eine Lognormalverteilung von Einkommen bzw. Vermögen geben. Diese Begründung basiert auf dem Gibrat'schen Gesetz bzw. dem Gesetz vom proportionalen Effekt, wonach beispielsweise im Hinblick auf Einkommensungleichheit relative Einkommensunterschiede auf stochastisch unabhängige Zufallseinflüsse zurückzuführen sind. Für das Einkommen $y(i)$ eines Individuums i gilt dann, dass

$$y(i) = \bar{y}\,(\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \cdots \times \varepsilon_m) = \bar{y}\,\Pi_{j=1}^{m} \varepsilon_j \tag{34}$$

wobei ε_j für $j = 1, \ldots, m$ jeweils stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind, deren Realisationen letztlich das Individualeinkommen bestimmen und $\bar{y}$ eine für alle Individuen identische Einkommenskomponente darstellt. Wird (34) logarithmiert, ergibt sich:

$$\ln y(i) = \ln \bar{y} + \sum_{j=1}^{m} \ln \varepsilon_j \tag{35}$$

Wird nun unterstellt, dass die logarithmierten Zufallsvariablen $\ln \varepsilon_j$ jeweils den Erwartungswert $\mu_{\varepsilon,j}$ und die Varianz $\sigma^2_{\varepsilon,j}$ aufweisen, dann ist der Ausdruck $\sum_{j=1}^{m} \ln \varepsilon_j$ dem zentralen Grenzwertsatz folgend approximativ normalverteilt, so dass $\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \sim \mathcal{N}(\mu_\varepsilon, \sigma^2_\varepsilon)$. Folglich ist $\ln y(i)$ ebenfalls approximativ normalverteilt bzw. die Einkommen sind approximativ lognormalverteilt:

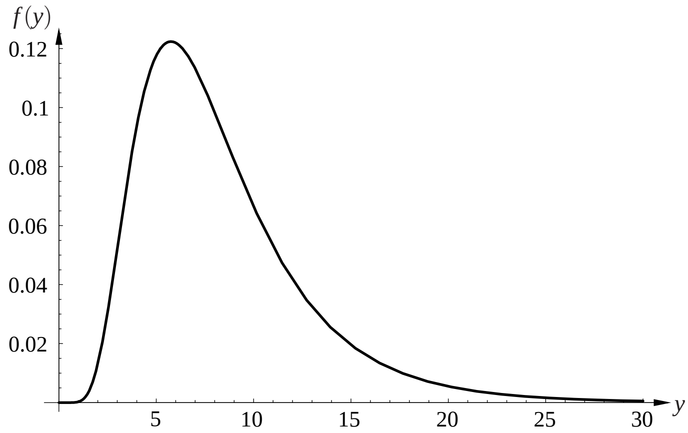
$$y(i) \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)\,,$$

wobei $\mu = \bar{y} + \mu_\varepsilon$ und $\sigma^2 = \sigma^2_\varepsilon$ gilt.

Der Erwartungswert einer gemäß (33) lognormalverteilten Zufallsvariablen ergibt sich als:

$$\mathrm{E}[y] = \exp\left(\mu + \sigma^2/2\right) \tag{36}$$

Abbildung 11: *Dichtefunktion der Lognormalverteilung* LN$(2, 0.5)$



Für den Logarithmus des Erwartungswertes $\ln \mathrm{E}[y]$ gilt demnach $\ln \mathrm{E}[y] = \mu + \sigma^2/2$. Für die Varianz $\mathrm{Var}[y]$ gilt:

$$\mathrm{Var}[y] = \mathrm{E}[y]^2 \left(\exp(\sigma^2) - 1\right) \tag{37}$$

Im Fall einer Lognormalverteilung können einige der bisher diskutieren Ungleichheitsmaße recht einfach berechnet werden. Zwar werden die Normalverteilung bzw. die Lognormalverteilung durch zwei Parameter — μ und σ^2 — vollständig charakterisiert, jedoch zeigt sich, dass nur der Parameter σ^2 für die Ungleichheitsmessung relevant ist. Zur einfacheren Darstellung wird zunächst die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ definiert:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(y^2\right) dy$$

Sofern $\ln y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ gilt, ergibt sich die Lorenzkurve gemäß (10) als:

$$L(p) = \Phi\left(\Phi^{-1}(p) - \sigma^2\right), \quad p \in (0,1) \tag{38}$$

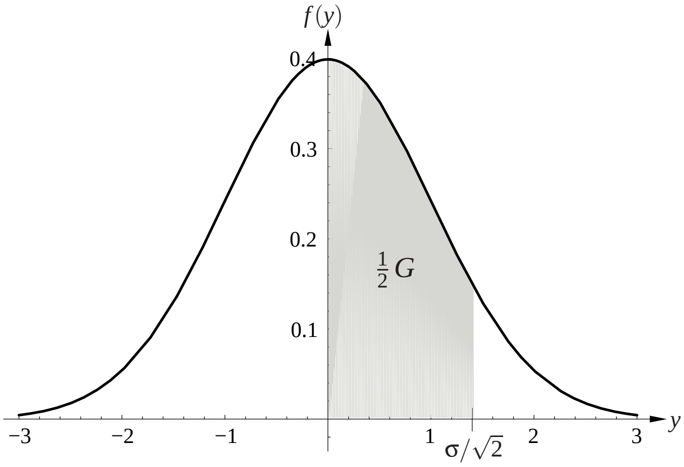
Aus (38) folgt dann unmittelbar, dass ausschließlich der Parameter σ^2 der lognormalverteilung ausschlaggebend für die Gestalt der Lorenzkurve ist. Lorenzkurven von Lognormalverteilungen können sich daher niemals schneiden und Lorenzdominanz einer Lognormalverteilung $\mathrm{LN}(\mu_1, \sigma_1^2)$ gegenüber der Lognormalverteilung $\mathrm{LN}(\mu_2, \sigma_2^2)$ liegt dann und nur dann vor, wenn $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ gilt.

Für den Gini–Koeffizienten einer Lognormalverteilung $LN(\mu, \sigma^2)$ gilt:

$$G(\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)) = 2\Phi\left(\sigma/\sqrt{2}\right) - 1 \tag{39}$$

Der Gini–Koeffizient ist daher eine monoton wachsende Funktion der Varianz σ^2. Aus (39) folgt zudem, dass sich der Gini–Koeffizient einer Lognormalverteilung

Abbildung 12: *Gini–Koeffizient der Lognormalverteilung*



$\mathrm{LN}(\mu,\sigma)$ grafisch als das Zweifache der Fläche unter der Dichtefunktion einer Standardnormalverteilung zwischen 0 und $\sigma/\sqrt{2}$ ergibt. Abbildung 12 veranschaulicht dies für den Fall von Lognormalverteilungen $\mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$ mit $\sigma^2 = 4$.

Da sich empirische Einkommens- und Vermögensverteilungen gut durch Lognormalverteilungen approximieren lassen und, wie sich herausgestellt hat, lediglich der Parameter σ^2 dieser Verteilung für die Ungleichheitsmessung relevant ist, wäre damit letztlich sogar noch ein weiteres Ungleichheitsmaß gefunden. Die Varianz der logarithmierten Einkommen $\mathrm{Var}[\ln y]$ kann als Schätzwert für σ^2 und damit auch als Ungleichheitsmaß verwendet werden. Unter der Annahme der Lognormalverteilung handelt sich bei diesem Maß dann wie (39) zeigt, um eine monotone Transformation des Gini–Koeffizienten.

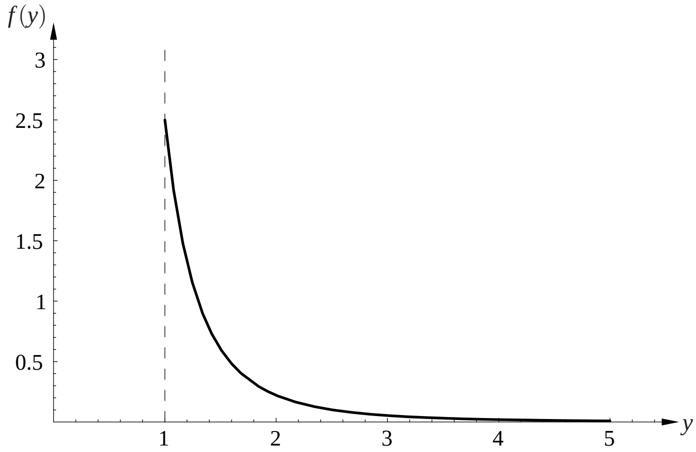
8.3 Die Pareto–Verteilung

Die Pareto–Verteilung wurde von dem italienischen Ökonomen Vilfredo Pareto zur Beschreibung von Vermögensverteilungen verwendet. Insbesondere der obere Rand von Einkommens- oder Vermögensverteilungen lässt sich mit Hilfe dieser Verteilung gut abbilden. Die Dichtefunktion einer Pareto–Verteilung mit den Parametern $y_0 > 0$ und $\alpha > 1$, $P(y_0,\alpha)$ lautet:

$$f(y) = \begin{cases} 0 & y < y_0 \\ \alpha y_0^{\alpha} y^{-(\alpha+1)} & y \geq y_0 \end{cases} \tag{40}$$

Abbildung 13 zeigt die Dichtefunktion einer Pareto–Verteilung $P(1,2.5)$. Als Verteilungsfunktion der Pareto–Verteilung $P(y_0,\alpha)$ resultiert:

Abbildung 13: *Dichtefunktion einer Pareto-Verteilung mit* $\alpha = 2.5$, $y_0 = 1$



$$F(y) = \int_{y_0}^{y} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & y < y_0 \\ 1-(y_0/y)^{\alpha} & y \geq y_0 \end{cases} \tag{41}$$

Da $1-F(y)$ den Anteil der Einkommensbezieher in der Pareto–Verteilung bezeichnet, deren Einkommen größer als y ist, gilt folglich $\ln(1-F(y)) = \alpha \ln y_0 + \alpha \ln y$. Wird der Anteil der Individuen an der Gesamtpopulation, deren Einkommen größer als y ist, mit $n(y)$ bezeichnet, ergibt sich demnach bei einer Pareto–Verteilung, dass:

$$\ln n(y) = \alpha \ln y_0 + \alpha \ln y \tag{42}$$

Die in Logarithmen lineare Beziehung (42) kann nun zur Schätzung von α aus Einkommens- oder Vermögensdaten verwendet werden. Hierbei zeigt sich dann üblicherweise, dass dieser lineare Zusammenhang für hohe Einkommens- bzw. Vermögenswerte eine gute Approximation darstellt, nicht jedoch für den gesamten Bereich empirischer Verteilungen.

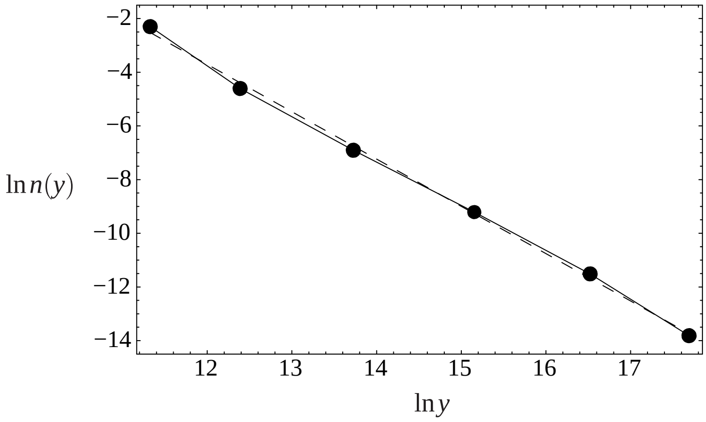
Tabelle 6 zeigt entsprechende Werte für den oberen Rand der Verteilung der Markteinkommen in Deutschland im Jahr 2001. Abbildung 14 zeigt die aus diesen Daten konstruierte Beziehung zwischen dem Logarithmus der Einkommen und dem Logarithmus der Einkommensperzentile. Ein annähernd linearer Zusammenhang, wie er in Gleichung (42) zum Ausdruck kommt, ist deutlich ersichtlich. Wird das Steigungsmaß der Pareto–Geraden mittels der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt, ergibt sich in diesem Fall ein Schätzwert für den Parameter α von 1.76261. Die in Abbildung 14 ebenfalls dargestellte geschätzte Gerade zeigt, dass der obere Rand der Einkommensverteilung in der Tat gut durch die so genannte Pareto–Gerade approximiert wird.

Für den Erwartungswert und die Varianz der Pareto–Verteilung $P(y_0, \alpha)$ ergibt sich:

Tabelle 6: *Markteinkommen y (in 1000 €), die von n(y)% der Einkommensbezieher überschritten werden, in Deutschland 2001 (entnommen aus: Bach & Steiner (2007))*

y	83	240	914	3811	14981	48152
$n(y)$	10	1	0.1	0.01	0.001	0.0001

Abbildung 14: *Pareto–Gerade für die Einkommensverteilung in Deutschland*



$$\mathrm{E}[y] = \frac{\alpha y_0}{\alpha - 1}$$

$$\mathrm{Var}[y] = \frac{\alpha y_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \quad \alpha > 2 \tag{43}$$

Wie schon bei der Lognormalverteilung können auch bei der Pareto–Verteilung die Lorenzkurve und der Gini–Koeffizient direkt aus der Verteilungsfunktion berechnet werden. Für die Lorenzkurve folgt:

$$L(p) = 1 - (1-p)^{1-1/\alpha}, \quad 0 \leq p \leq 1 \tag{44}$$

Aus (44) folgt dann unmittelbar, dass sich Lorenzkurven der Pareto–Verteilung für unterschiedliche α niemals schneiden können. Lorenzdominanz einer Pareto–Verteilung $P(y_{0,1}, \alpha_1)$ gegenüber einer anderen Pareto–Verteilung $P(y_{0,2}, \alpha_2)$ ergibt sich dann und nur dann, wenn $\alpha_1 > \alpha_2$ gilt.

Für den Gini–Koeffizienten einer Pareto–Verteilung $P(y_0, \alpha)$ ergibt sich:

$$G(P(y_0, \alpha)) = \frac{1}{2\alpha - 1} \tag{45}$$

Der Gini–Koeffizient hängt ebenfalls nicht vom Parameter y_0 sondern nur vom Parameter α ab und sinkt monoton mit steigendem α.

9 Ausblick

Wie bereits eingangs erwähnt wurde, war es die Absicht der vorausgegangenen Ausführungen, eine einführende Darstellung der grundlegenden Probleme, die im Zusammenhang mit der Ungleichheitsmessung auftreten, zu geben und einige gebräuchliche Methoden der Ungleichheitsmessung vorzustellen. Insgesamt ist hier somit selbstverständlich kein umfassender Überblick über den Bereich der Ungleichheitsmessung gegeben worden. Insbesondere der Bereich der empirischen Ungleichheitsmessung mit den bei der empirischen Umsetzung der hier diskutierten Verfahren auftretenden Probleme der Verfügbarkeit von Daten und der Abgrenzung des Einkommens- und Vermögensbegriffs wurde hier nur nicht oder nur ansatzweise erörtert. Von daher sei an dieser Stelle nochmals ausdrücklich auf die eingangs erwähnte Literatur verwiesen, in der unter anderem auch diese Aspekte dargestellt werden.

Empirische Befunde zur Einkommens- und Vermögensverteilung in Deutschland finden sich im bereits zitierten 2. Armuts- und Reichtumsbericht der Bundesregierung aus dem Jahr 2002. Der aktuelle 3. Armuts- und Reichtumsbericht mit neueren Befunden liegt inzwischen ebenfalls vor. Beide Berichte können von den Internetseiten des Bundesministeriums für Arbeit und Soziales heruntergeladen werden. Darüber hinaus veröffentlicht beispielsweise auch das Deutsche Institut für Wirtschaftsforschung regelmäßig Studien zur Einkommens- und Vermögensungleichheit und zur Armutsentwicklung in Deutschland (vgl. z.B. Frick & Grabka (2008)).

Literatur

Atkinson, T., (1970), On the measurement of inequality, Journal of Economic Theory 2, 244–263.

Bach, S. & Steiner, V., (2007), Zunehmende Ungleichheit der Markteinkommen: Reale Zuwächse nur für Reiche, DIW–Wochenbericht 13, 193–198.

Bundesregierung, (2002), Lebenslagen in Deutschland, 2. Armuts- und Reichtumsbericht der Bundesregierung, Berlin.

Champernowne, D. & Cowell, F., (1998), Economic Inequality and Income distribution (Cambridge University Press, Cambridge/Mass.).

Cowell, F., (2000), Measurement of inequality, in: A. Atkinson & F. Bourguignon, eds., Handbook of Income Distribution (North-Holland, Amsterdam), 87–166.

Dalton, H., (1920), Measurement of the inequality of incomes, Economic Journal 30, 348–361.

Foster, J., Greer, J. & Thorbecke, E., (1984), A class of decomposable poverty measures, Econometrica 56, 173–177.

Frick, J. & Grabka, M., (2008), Niedrigere Arbeitslosigkeit sorgt für weniger Armutsrisiko und Ungleichheit, DIW–Wochenbericht 38, 556–566.

Gravelle, H. & Rees, R., (2004), Microeconomics (Prentice–Hall), 3rd edn.

Hauser, R. & Becker, I., (2000), Changes in the distribution of pre–government and post–government income in germany 1973–1993, in: R. Hauser & I. Becker, eds., The Personal Distribution of Income in an International Perspective (Springer-Verlag, Berlin), 72–98.

Hauser, R. & Wagner, G., (2002), Die personelle Einkommensverteilung, in: K. Zimmermann, ed., Neue Entwicklungen in der Wirtschaftswissenschaft (Springer–Verlag, Berlin), 371–438.

Jenkins, S., (1991), The measurement of economic inequality, in: L. Osberg, ed., Readings on Economic Inequality (M.E. Sharpe, Armonk, NY), 3–38.

Lambert, P., (1989), The Distribution and Redistribution of Income: A Mathematical Analysis (Basil Blackwell, Oxford).

Pigou, A., (1912), Wealth and Welfare (Macmillan, London).

Rawls, J., (1971), A Theory of Justice (Cambridge University Press, Cambridge, MA.).

Shorrocks, A., (1983), Ranking income distributions, Economica 50, 1–17.

Working Paper Series in Economics

(see www.leuphana.de/vwl/papers for a complete list)

No.107: *Claus Schnabel & Joachim Wagner:* Union Membership and Age: The inverted U-shape hypothesis under test. November 2008

No.106: *Alexander Vogel & Joachim Wagner:* Higher Productivity in Importing German Manufacturing Firms: Self-selection, Learning from Importing, or Both? November 2008

No.105: *Markus Groth:* Kosteneffizienter und effektiver Biodiversitätsschutz durch Ausschreibungen und eine ergebnisorientierte Honorierung: Das Modellprojekt „Blühendes Steinburg“. November 2008

No.104: *Alexander Vogel & Joachim Wagner:* Export, Import und Produktivität wissensintensiver KMUs in Deutschland. Oktober 2008

No.103: *Christiane Clemens & Maik Heinemann:* On Entrepreneurial Risk – Taking and the Macroeconomic Effects Of Financial Constraints, October 2008

No.102: *Helmut Fryges & Joachim Wagner*: Exports and Profitability – First Evidence for German Manufacturing Firms. October 2008

No.101: *Heike Wetzel*: Productivity Growth in European Railways: Technological Progress, Efficiency Change and Scale Effects. October 2008

No.100: *Henry Sabrowsk*i: Inflation Expectation Formation of German Consumers: Rational or Adaptive? October 2008

No.99: *Joachim Wagner*: Produktdifferenzierung in deutschen Industrieunternehmen 1995 – 2004: Ausmaß und Bestimmungsgründe, Oktober 2008

No.98: *Jan Kranich:* Agglomeration, vertical specialization, and the strength of industrial linkages, September 2008

No.97: *Joachim Wagner:* Exports and firm characteristics - First evidence from Fractional Probit Panel Estimates, August 2008

No.96: *Nils Braakmann:* The smoking wage penalty in the United Kingdom: Regression and matching evidence from the British Household Panel Survey, August 2008

No.95: *Joachim Wagner:* Exportaktivitäten und Rendite in niedersächsischen Industrieunternehmen, August 2008
[publiziert in: Statistische Monatshefte Niedersachsen 62 (2008), 10,552-560]

No.94: *Joachim Wagner:* Wirken sich Exportaktivitäten positiv auf die Rendite von deutschen Industrieunternehmen aus?, August 2008
[publiziert in: Wirtschaftsdienst, 88 (2008) 10, 690-696]

No.93: *Claus Schnabel & Joachim Wagner:* The aging of the unions in West Germany, 1980-2006, August 2008
[forthcoming in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik]

No.92: *Alexander Vogel and Stefan Dittrich:* The German turnover tax statistics panels, August 2008
[forthcoming in: Schmollers Jahrbuch 128 (2008)]

No.91: *Nils Braakmann:* Crime does pay (at least when it’s violent!) – On the compensating wage differentials of high regional crime levels, July 2008

No.90: *Nils Braakmann:* Fields of training, plant characteristics and the gender wage gap in entry wages among skilled workers – Evidence from German administrative data, July 2008

No.89: *Alexander Vogel:* Exports productivity in the German business services sector: First evidence from the Turnover Tax Statistics panel, July 2008

No.88: *Joachim Wagner:* Improvements and future challenges for the research infrastructure in the field *Firm Level Data*, June 2008

No.87: *Markus Groth:* A review of the German mandatory deposit for one-way drinks packaging and drinks packaging taxes in Europe, June 2008

No.86: *Heike Wetzel:* European railway deregulation. The influence of regulatory ans environmental conditions on efficiency, May 2008

No.85: *Nils Braakmann:* Non scholae, sed vitae discimus! - The importance of fields of study for the gender wage gap among German university graduates during market entry and the first years of their careers, May 2008

No.84: *Markus Groth:* Private ex-ante transaction costs for repeated biodiversity conservation auctions: A case study, May 2008

No.83: *Jan Kranich:* R&D and the agglomeration of industries, April 2008

No.82: *Alexander Vogel:* Zur Exporttätigkeit unternehmensnaher Dienstleister in Niedersachsen - Erste Ergebnisse zu Export und Produktivität auf Basis des Umsatzsteuerstatistikpanels, April 2008

No.81: *Joachim Wagner:* Exporte und Firmenerfolg: Welche Firmen profitieren wie vom internationalen Handel?, März 2008

No.80: *Stefan Baumgärtner:* Managing increasing environmental risks through agro-biodiversity and agri-environmental policies, March 2008

No.79: *Thomas Huth:* Die Quantitätstheorie des Geldes – Eine keynesianische Reformulierung, März 2008

No.78: *Markus Groth:* An empirical examination of repeated auctions for biodiversity conservation contracts, March 2008

No.77: *Nils Braakmann:* Intra-firm wage inequality and firm performance – First evidence from German linked employer-employee-data, February 2008

No.76: *Markus Groth*: Perspektiven der Nutzung von Methanhydraten als Energieträger – Eine Bestandsaufnahme, Februar 2008

No.75: *Stefan Baumgärtner, Christian Becker, Karin Frank, Birgit Müller & Christian Quaas:* Relating the philosophy and practice of ecological economics. The role of concepts, models, and case studies in inter- and transdisciplinary sustainability research, January 2008
[publisched in: Ecological Economics 67 (2008), 3 , 384-393]

No.74: *Thorsten Schank, Claus Schnabel & Joachim Wagner:* Higher wages in exporting firms: Self-selection, export effect, or both? First evidence from German linked employer-employee data, January 2008

No.73: *Institut für Volkswirtschaftslehre:* Forschungsbericht 2007, Januar 2008

No.72: *Christian Growitsch and Heike Wetzel:Testing for* economies of scope in European railways: An efficiency analysis, December 2007
[revised version of Working Paper No. 29,
forthcoming in: Journal of Transport Economics and Policy]

No.71: *Joachim Wagner, Lena Koller and Claus Schnabel:* Sind mittelständische Betriebe der Jobmotor der deutschen Wirtschaft?, Dezember 2007
[publiziert in: Wirtschftsdienst 88 (2008), 2, 130-135]

No.70: *Nils Braakmann:* Islamistic terror, the war on Iraq and the job prospects of Arab men in Britain: Does a country's direct involvement matter?, December 2007

No.69: *Maik Heinemann:* E-stability and stability learning in models with asymmetric information, December 2007

No.68: *Joachim Wagner:* Exporte und Produktivität in Industriebetrieben – Niedersachsen im interregionalen und internationalen Vergleich, Dezember 2007

No.67: *Stefan Baumgärtner and Martin F. Quaas:* Ecological-economic viability as a criterion of strong sustainability under uncertainty, November 2007

No.66: *Kathrin Michael:* Überbrückungsgeld und Existenzgründungszuschuss – Ergebnisse einer schriftlichen Befragung drei Jahre nach Gründungsbeginn, November 2007

No.65: *The International Study Group on Export and Productivity:* Exports and Productivity – Comparable Evidence for 14 Countries, November 2007
[forthcoming in: Review of World Economics 144 (2008), 4]

No.64: *Lena Koller, Claus Schnabel und Joachim Wagner:* Freistellung von Betriebsräten – Eine Beschäftigungsbremse?, November 2007
[publiziert in: Zeitschrift für Arbeitsmarktforschung, 41 (2008), 2/3, 305-326]

No.63: *Anne-Kathrin Last:* The Monetary Value of Cultural Goods: A Contingent Valuation Study of the Municipal Supply of Cultural Goods in Lueneburg, Germany, October 2007

No.62: *Thomas Wein und Heike Wetzel:* The Difficulty to Behave as a (regulated) Natural Monopolist – The Dynamics of Electricity Network Access Charges in Germany 2002 to 2005, September 2007

No.61: *Stefan Baumgärtner und Martin F. Quaas:* Agro-biodiversity as natural insurance and the development of financial insurance markets, September 2007
[published in: A. Kontoleon, U. Pascual and M. Smale (eds.): Agrobiodiversity, conservation and economic development, Routledge, London, 293-317]

No.60: *Stefan Bender, Joachim Wagner, Markus Zwick:* KombiFiD - Kombinierte Firmendaten für Deutschland, September 2007

No.59: *Jan Kranich*: Too much R&D? - Vertical differentiation in a model of monopolistic competition, August 2007

No.58: *Christian Papilloud und Ingrid Ott:* Convergence or mediation? Experts of vulnerability and the vulnerability of experts' discourses on nanotechnologies – a case study, July 2007
[published in: European Journal of Social Science Research 21 (2008), 1, 41-64]

No.57: *Ingrid Ott und Susanne Soretz:* Governmental activity, integration and agglomeration, July 2007
[published in: ICFAI Journal of Managerial Economics 5 (2008), 2, 28-47]

No.56: *Nils Braakmann:* Struktur und Erfolg von Ich-AG-Gründungen: Ergebnisse einer Umfrage im Arbeitsagenturbezirk Lüneburg, Juli 2007
[revidierte Fassung erscheint in: Richter, J., Schöning, S. & Wetzel, H., Mittelstand 2008. Aktuelle Forschungsbeiträge zu gesellschaftlichen und finanzwirtschaftlichen Herausforderungen, Frankfurt am Main: Peter Lang, 2008]

No.55: *Nils Braakmann:* Differences in the earnings distribution of self- and dependent employed German men – evidence from a quantile regression decomposition analysis, July 2007

No.54: *Joachim Wagner:* Export entry, export exit, and productivity in German Manufacturing Industries, June 2007
[published in: International Journal of the Economics of Business 15 (2008), 2, 169-180]

No.53: *Nils Braakmann:* Wirkungen der Beschäftigungspflicht schwerbehinderter Arbeitnehmer – Erkenntnisse aus der Einführung des „Gesetzes zur Bekämpfung der Arbeitslosigkeit Schwerbehinderter“, Juni 2007
[revidierte Fassung erscheint in: Zeitschrift für Arbeitsmarktforschung/ Journal for Labour Market Research 41 (2008),1, 9-24]

No.52: *Jan Kranich und Ingrid Ott:* Regionale Spitzentechnologie auf internationalen Märkten, Juni 2007
[erscheint in: Merz, J. und Schulte, R. (Hrsg.): Neue Ansätze der MittelstandsForschung, Münster, 2007]

No.51: *Joachim Wagner:* Die Forschungspotenziale der Betriebspaneldaten des Monatsberichts im Verarbeitenden Gewerbe, Mai 2007
[publiziert in: AStA – Wirtschafts- und Sozialwirtschaftliches Archiv 2 (2008), 3, 209-221]

No.50: *Stefan Baumgärtner, Frank Jöst und Ralph Winkler:* Optimal dynamic scale and structure of a multi-pollution economy, May 2007
[forthcoming in: Ecological Economics]

No.49: *Helmut Fryges und Joachim Wagner:* Exports and productivity growth – First evidence from a continuous treatment approach, May 2007
[forthcoming in: Review of World Economics]

No.48: *Ulrich Kaiser und Joachim Wagner:* Neue Möglichkeiten zur Nutzung vertraulicher amtlicher Personen- und Firmendaten, April 2007
[publiziert in: Perspektiven der Wirtschaftspolitik 9 (2008), 3, 329-349]

No.47: *Joachim Wagner:* Jobmotor Mittelstand? Arbeitsplatzdynamik und Betriebsgröße in der westdeutschen Industrie, April 2007
[publiziert in: Vierteljahrshefte zur Wirtschaftsforschung, 76 (2007), 3, 76-87]

No.46: *Christiane Clemens und Maik Heinemann:* Credit Constraints, Idiosyncratic Risks, and the Wealth Distribution in a Heterogenous Agent Model, March 2007

No.45: *Jan Kranich:* Biotechnologie und Internationalisierung. Ergebnisse der Online-Befragung, März 2007

No.44: *Joachim Wagner:* Entry, exit and productivity. Empirical results for German manufacturing industries, March 2007
[forthcoming in: German Economic Review]

No.43: *Joachim Wagner:* Productivity and Size of the Export Market Evidence for West and East German Plants, 2004, March 2007
[publiziert in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 227 (2007), 4, 403-408]

No.42: *Joachim Wagner:* Why more West than East German firms export, March 2007 [forthcoming in: International Economics and Economic Policy]

No.41: *Joachim Wagner:* Exports and Productivity in Germany, March 2007 [publiziert in: Applied Economics Quarterly 53 (2007), 4, 353-373]

No.40: *Lena Koller, Klaus Schnabel und Joachim Wagner:* Schwellenwerte im Arbeitsrecht. Höhere Transparenz und Effizienz durch Vereinheitlichung, Februar 2007 [publiziert in: Perspektiven der Wirtschaftspolitik, 8 (2007), 3, 242-255]

No.39: *Thomas Wein und Wiebke B. Röber:* Sind ausbildende Handwerksbetriebe erfolgreicher?, Januar 2007

No.38: *Institut für Volkswirtschaft:* Forschungsbericht 2006, Januar 2007

No.37: *Nils Braakmann:* The impact of September 11th, 2001 on the job prospects of foreigners with Arab background – Evidence from German labor market data, January 2007 [revised version forthcoming as "The impact of September 11th, 2001 on the employment prospects of Arabs and Muslims in the German labor market" in Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik / Journal of Economics and Statistics]

No.36: *Jens Korunig:* Regulierung des Netzmonopolisten durch Peak-load Pricing?, Dezember 2006

No.35: *Nils Braakmann:* Die Einführung der fachkundigen Stellungnahme bei der Ich-AG, November 2006 [erscheint in: Schulte, Reinhard: Neue Ansätze der MittelstandsForschung, Münster etc.: Lit, 2008]

No.34: *Martin F. Quaas and Stefan Baumgärtner:* Natural vs. financial insurance in the management of public-good ecosystems, October 2006 [published in: Ecological Economics 65 (2008), 2, 397-406]

No.33: *Stefan Baumgärtner and Martin F. Quaas:* The Private and Public Insurance Value of Conservative Biodiversity Management, October 2006

No.32: *Ingrid Ott and Christian Papilloud:* Converging institutions. Shaping the relationships between nanotechnologies, economy and society, October 2006 [published in: Bulletin of Science, Technology & Society 2007 (27), 4, 455-466]

No.31: *Claus Schnabel and Joachim Wagner:* The persistent decline in unionization in western and eastern Germany, 1980-2004: What can we learn from a decomposition analysis?, October 2006 [published in: Industrielle Beziehungen/The German Journal of Industrial Relations 14 (2007), 118-132]

No.30: *Ingrid Ott and Susanne Soretz:* Regional growth strategies: fiscal versus institutional governmental policies, September 2006 [published in: Economic Modelling 25 (1008), 605-622]

No.29: *Christian Growitsch and Heike Wetzel:* Economies of Scope in European Railways: An Efficiency Analysis, July 2006

No.28: *Thorsten Schank, Claus Schnabel and Joachim Wagner:* Do exporters really pay higher wages? First evidence from German linked employer-employee data, June 2006 [published in in: Journal of International Economics 72 (2007), 1, 52-74]

No.27: *Joachim Wagner:* Markteintritte, Marktaustritte und Produktivität
Empirische Befunde zur Dynamik in der Industrie, März 2006
[publiziert in: AStA – Wirtschafts- und Sozialwirtschaftliches Archiv 1 (2007), 3, 193-203]

No.26: *Ingrid Ott and Susanne Soretz:* Governmental activity and private capital adjustment, March 2006
[forthcoming in: Icfai Journal of Managerial Economics]

No.25: *Joachim Wagner:* International Firm Activities and Innovation:
Evidence from Knowledge Production Functions for German Firms, March 2006
[published in: The Icfai Journal of Knowledge Management VI (2008), 2, 47-62]

No.24: *Ingrid Ott und Susanne Soretz:* Nachhaltige Entwicklung durch endogene Umweltwahrnehmung, März 2006
publiziert in: Clemens, C., Heinemann, M. & Soretz, S., Auf allen Märkten zu Hause (Gedenkschrift für Franz Haslinger), Marburg: Metropolis, 2006, 233-256

No.23: *John T. Addison, Claus Schnabel, and Joachim Wagner:* The (Parlous) State of German Unions, February 2006
[published in: Journal of Labor Research 28 (2007), 3-18]

No.22: *Joachim Wagner, Thorsten Schank, Claus Schnabel, and John T. Addison:* Works Councils, Labor Productivity and Plant Heterogeneity: First Evidence from Quantile Regressions, February 2006
[published in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 226 (2006), 505 - 518]

No.21: *Corinna Bunk:* Betriebliche Mitbestimmung vier Jahre nach der Reform des BetrVG: Ergebnisse der 2. Befragung der Mitglieder des Arbeitgeberverbandes Lüneburg Nordostniedersachsen, Februar 2006

No.20: *Jan Kranich:* The Strength of Vertical Linkages, July 2006

No.19: *Jan Kranich und Ingrid Ott:* Geographische Restrukturierung internationaler Wertschöpfungsketten – Standortentscheidungen von KMU aus regionalökonomischer Perspektive, Februar 2006
[publiziert in: Merz, J. und Schulte, R. (Hrsg.): Fortschritte in der MittelstandsForschung, Münster, 2006, 113-129]

No.18: *Thomas Wein und Wiebke B. Röber:* Handwerksreform 2004 – Rückwirkungen auf das Ausbildungsverhalten Lüneburger Handwerksbetriebe?, Februar 2006

No.17: *Wiebke B. Röber und Thomas Wein:* Mehr Wettbewerb im Handwerk durch die Handwerksreform?, Februar 2006

No.16: *Joachim Wagner:* Politikrelevante Folgerungen aus Analysen mit wirtschaftsstatistischen Einzeldaten der Amtlichen Statistik, Februar 2006
[publiziert in: Schmollers Jahrbuch 126 (2006) 359-374]

No.15: *Joachim Wagner:* Firmenalter und Firmenperformance
Empirische Befunde zu Unterschieden zwischen jungen und alten Firmen
in Deutschland, September 2005
[publiziert in: Lutz Bellmann und Joachim Wagner (Hrsg.), Betriebsdemographie (Beiträge zur Arbeitsmarkt- und Berufsforschung, Band 305), Nürnberg: IAB der BA, 83-111]

No.14: *Joachim Wagner:* German Works Councils and Productivity: First Evidence from a Nonparametric Test, September 2005
[published in: Applied Economics Letters 115 (2008), 727-730]

No.13: *Lena Koller, Claus Schnabel und Joachim Wagner:* Arbeitsrechtliche Schwellenwerte und betriebliche Arbeitsplatzdynamik: Eine empirische Untersuchung am Beispiel des Schwerbehindertengesetzes, August 2005
[publiziert in: Zeitschrift für ArbeitsmarktForschung/ Journal for Labour Market Research 39 (2006), 181-199]

No.12: *Claus Schnabel and Joachim Wagner:* Who are the workers who never joined a union? Empirical evidence from Germany, July 2005
[published in: Industrielle Beziehungen/ The German Journal of Industrial Relations 13 (2006), 118-131]

No.11: *Joachim Wagner:* Exporte und Produktivität in mittelständischen Betrieben Befunde aus der niedersächsischen Industrie (1995 – 2004), June 2005
[publiziert in: Niedersächsisches Landesamt für Statistik, Statistische Berichte Niedersachsen, Sonderausgabe: Tagung der NLS am 9. März 2006, Globalisierung und regionale Wirtschaftsentwicklung - Datenlage und Datenbedarf in Niedersachsen. Hannover, Niedersächsisches Landesamt für Statistik, Juli 2006, 18 – 29]

No.10: *Joachim Wagner:* Der Noth gehorchend, nicht dem eignen Trieb. Nascent Necessity and Opportunity Entrepreneurs in Germany. Evidence from the Regional Entrepreneurship Monitor (REM), May 2005
[published in: RWI: Mitteilungen. Quarterly 54/ 55 (2003/04), 287-303 {published June 2006}]

No. 9: *Gabriel Desgranges and Maik Heinemann:* Strongly Rational Expectations Equilibria with Endogenous Acquisition of Information, March 2005

No. 8: *Joachim Wagner:* Exports, Foreign Direct Investment, and Productivity: Evidence from German Firm Level Data, March 2005
[published in: Applied Economics Letters 13 (2006), 347-349]

No. 7: *Thomas Wein:* Associations' Agreement and the Interest of the Network Suppliers – The Strategic Use of Structural Features, March 2005

No. 6: *Christiane Clemens and Maik Heinemann:* On the Effects of Redistribution on Growth and Entrepreneurial Risk-Taking, March 2005

No. 5: *Christiane Clemens and Maik Heinemann:* Endogenous Redistributive Cycles – An overlapping Generations Approach to Social Conflict and Cyclical Growth, March 2005

No. 4: *Joachim Wagner: Exports and Productivity:* A Survey of the Evidence from Firm Level Data, March 2005
[published in: The World Economy 30 (2007), 1, 60-82]

No. 3: *Thomas Wein and Reimund Schwarze:* Is the Market Classification of Risk Always Efficient? - Evidence from German Third Party Motor Insurance, March 2005

No. 2: *Ingrid Ott and Stephen J. Turnovsky:* Excludable and Non-Excludable Public Inputs: Consequences for Economic Growth, June 2005 (Revised version)
[published in: Economica 73 (2006), 292, 725-742
also published as CESifo Working Paper 1423]

No. 1: *Joachim Wagner:* Nascent and Infant Entrepreneurs in Germany. Evidence from the Regional Entrepreneurship Monitor (REM), March 2005 [erschienen in: Joachim Merz, Reinhard Schulte (Hrsg.), Neue Ansätze der MittelstandsForschung, Berlin: Lit Verlag 2008, S.395-411]

Leuphana Universität Lüneburg
Institut für Volkswirtschaftslehre
Postfach 2440
D-21314 Lüneburg
Tel.: ++49 4131 677 2321
email: brodt@leuphana.de
www.leuphana.de/vwl/papers