

Leuphana Universität Lüneburg

Statistik II

Wahrscheinlichkeitsrechnung
und induktive Statistik

Fakultät Wirtschaft
Professur 'Statistik und Freie Berufe'
Univ.-Prof. Dr. Joachim Merz

Übungs- und Klausuraufgaben
mit Lösungen

Elfte Auflage 2015

Impressum: Statistik II – Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktive Statistik,
herausgegeben von der Leuphana Universität Lüneburg,

Fakultät Wirtschaft

Univ.-Prof. Dr. Joachim Merz,

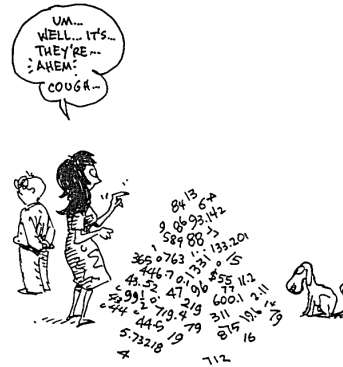
Forschungsinstitut Freie Berufe, Professur 'Statistik und Freie Berufe'

21332 Lüneburg,

www.leuphana.de/ffb

Gedruckt auf 100% Altpapier und chlorfrei gebleichtem Papier.

Copyright © 2015



Vorwort

Für das "aktive Lernen" des Stoffes aus Statistik II - Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktive Statistik sind in diesem Übungsbuch die vorlesungsbegleitenden Übungsaufgaben sowie eine Klausur jeweils mit Lösungen zusammengestellt.

Grundlage für dieses Skriptum ist meine Statistik II-Vorlesung an der Leuphana Universität Lüneburg mit den zugehörigen Plenarübungen.

Zur Vertiefung der Voraussetzungen weise ich auf mein Skriptum Statistik I - Deskriptive Statistik sowie auf das zugehörige Übungsbuch hin.

Es empfiehlt sich, die Klausur unter Examensbedingungen (Zeitvorgabe!) selbständig zu lösen.

Bei der Erstellung der Übungsaufgaben waren meine Tutorinnen und Tutoren tatkräftig und selbständig beteiligt; herzlichen Dank dafür.

Viel Spaß und Erfolg!

Lüneburg, im Februar 2015

Univ.-Prof. Dr. Joachim Merz

STATISTIK II - Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktive Statistik

A ÜBUNGSAUFGABEN MIT LÖSUNGEN

1	Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zufallvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen.....	5
2	Diskrete und stetige Verteilungen.....	11
3	Stichprobenfunktionen, Testverteilungen, Schätzfunktionen.....	17
4	Intervallschätzung.....	23
5	Parametertests.....	28
6	Zweistichprobentests, Anpassungstests.....	35

B KLAUSUR MIT LÖSUNG

Klausur.....	41
Lösung der Klausur.....	46

ANHANG: FORMELSAMMLUNG.....	53
------------------------------------	-----------

LITERATUR.....	106
-----------------------	------------

A Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabenblatt 1: Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1.1 Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung – erster Teil

1.1.1 Was bedeutet die Aussage „Die Ereignisse A und B sind disjunkt“?

1.1.2 $1 \leq P((A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B)) > 0$. Ist diese Aussage richtig oder falsch?

1.1.3 Bei der Anwendung des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs (die so genannte Laplace-Wahrscheinlichkeit) ist die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Elementarereignisse irrelevant. Ist diese Aussage richtig oder falsch?

1.1.4 Nennen Sie die drei Axiome nach Kolmogorov und erläutern Sie ihre Bedeutung.

1.1.5 Gilt die Gleichung $P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B)$, dann ist B meistens stochastisch unabhängig, allerdings nicht immer. Ist diese Aussage richtig oder falsch?

1.1.6 Beim Satz von Bayes wird von „*a priori*“ und „*a posteriori*“ Wahrscheinlichkeiten gesprochen. Was bedeuten diese?

1.2 Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung – zweiter Teil

1.2.1 Gegeben seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = 0,3 \quad P(B) = 0,4 \quad P(C) = 0,5 \quad P(A \cup C) = 0,7 \quad P(A \cap B) = 0$$

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A oder B eintritt?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A als auch C eintritt?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B unter der Voraussetzung, dass A bereits eingetreten ist?
- d) Sind die Ereignisse A und C stochastisch unabhängig?

1.2.2 Kombinatorik

- a) Sie befinden sich in der beneidenswerten Situation, fünf Seminararbeiten in einem Semester schreiben zu dürfen. Alle fünf müssen am gleichen Termin abgegeben werden. In wie vielen möglichen Reihenfolgen können Sie die Themen anordnen?
- b) Sie möchten sich als Gärtner versuchen und haben sieben Stiefmütterchen (zwei weiße, drei lilafarbene und zwei rote) gekauft, die Sie in einer Reihe pflanzen wollen. Wie viele Farbkombinationen stehen Ihnen zur Verfügung?
- c) Bei einem Fußballturnier treten 20 Mannschaften um den Kampf um die ersten drei Plätze gegeneinander an. Wie viele verschiedene Besetzungen des Siegertreppchens sind möglich?

- d) In Ihrer Lieblingseisdiele gibt es 15 verschiedene Sorten Eis, und Sie wollen sich drei gönnen. Zwischen wie vielen verschiedenen Möglichkeiten können Sie wählen, wenn Sie Ihre Lieblingssorten auch öfters wählen können?
- e) Sie haben in einer Spielshow gewonnen und dürfen sich aus zehn Preisen drei auswählen. Wie viele Kombinationen sind möglich?

1.2.3 Sie arbeiten für ein Institut, das sich mit dem Wählerverhalten in Deutschland beschäftigt. Sie haben bei einer Umfrage folgende Daten gesammelt: 35% der Befragten leben auf dem Land und 65% in der Stadt. 40% der Städter sind Stammwähler, auf dem Land sind es 80%. Nun stellt Ihnen ein interessierter Kollege die Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein Stammwähler aus der Stadt kommt. Was antworten Sie?

1.2.4 Ein Sammelsurium

- a) Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal „Kopf“ fällt?
- b) In einer Urne liegen fünf rote und drei weiße Kugeln. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen zweimal eine rote Kugel gezogen wird?
- c) Fünf gleich begabte Mäuse (Ernst, Dieter, Heinz, Klaus und Karl) tragen ein Rennen aus.
 - α) Wie wahrscheinlich ist es, dass Ernst gewinnt und Heinz oder Karl Zweiter wird?
 - β) Es finden drei Rennen hintereinander statt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Maus genau zweimal gewinnt?

1.3 Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilung

1.3.1 In Ihrem jugendlichen Leichtsinn haben Sie sich auf ein Hütchenspiel eingelassen. Da der Profi am anderen Ende so geschickt spielt, bleibt Ihnen nur die Möglichkeit zu raten, wo sich der Spielstein befindet.

Es gelten folgende Regeln: Sie müssen dreimal hintereinander erraten, unter welchem der drei Hütchen sich der Spielstein befindet. Wenn Sie dreimal richtig liegen, bekommen Sie 4,- €. Liegen Sie dreimal daneben, müssen Sie 4,- € bezahlen. Bei zwei richtigen Antworten bekommen Sie 3,- €, bei zwei falschen zahlen Sie 3,- €.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeits- und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X (X sei definiert als die Anzahl, beim Hütchenspiel richtig zu liegen, also das passende Hütchen zu wählen).
- b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens zweimal richtig liegen?
- c) Ist das Hütchenspiel fair? Ermitteln Sie hierfür den Erwartungswert der Zufallsvariable Y (Y sei definiert als der Gewinn bzw. Verlust beim Hütchenspiel nach dreimaligem Raten).

1.3.2 Sei X eine stetige Zufallsvariable mit folgender Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Welchen Wert muss a annehmen, damit $f(x)$ die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X ist? Falls ein solches a existiert und $f(x)$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist, wie lauten dann Erwartungswert $E(X)$ und Varianz $\text{Var}(X)$ der Zufallsvariablen?
- b) Unter der Annahme, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion ist: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen 0,4 und 1 annimmt?
- c) Unter der Annahme, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion ist: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X genau den Wert 1 annimmt?

Lösungen zu Aufgabenblatt 1

1.1 Verständnisfragen

1.1.1 Die Aussage bedeutet, dass sich die Ereignisse A und B ausschließen. (Sie können nicht gleichzeitig auftreten.)

1.1.2 Die Aussage ist falsch. A und $\bar{A}$ können nie zusammen auftreten, deshalb muss $P(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = 0$ sein.

1.1.3 Die Aussage ist falsch. Voraussetzung für den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff ist die Gleichwahrscheinlichkeit der Elementarereignisse.

1.1.4 1. $P(A) \geq 0$: Eine Wahrscheinlichkeit kann nie einen negativen Wert annehmen.

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$: Sind zwei Ereignisse A und B disjunkt, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten einer der beiden Ereignisse durch die Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten.

3. $P(G) = 1$: Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines beliebigen Ereignisses des Ergebnisraumes ist 1.

1.1.5 Die Aussage ist falsch. Gilt die Gleichung, ist B immer stochastisch unabhängig.

1.1.6 Die Wahrscheinlichkeiten der sich ausschließenden Alternativen $P(A_i)$ heißen a priori Wahrscheinlichkeiten. Für sie gilt: $\sum_{i=1}^j A_j = 1$.

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von A_j bei vorherigem Eintreten des Ereignisses ε , $P(A|\varepsilon)$, heißen a posteriori Wahrscheinlichkeiten und liefern zusätzliche Informationen.

1.2.1 a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0 = 0,7$

b) $P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) = 0,3 + 0,5 - 0,7 = 0,1$

c) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{0,3} = 0$

d) $P(C|A) = P(C)$; $\frac{P(A \cap C)}{P(A)} = P(C)$; $\frac{0,1}{0,3} \neq 0,5$ (A und C sind folglich nicht stochastisch unabhängig.)

1.2.2 a) Permutation verschiedener Elemente: $n! = 5! = 120$

b) Permutation mit gleichen Elementen: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 210$

c) Variation ohne Wiederholung (Reihenfolge wichtig):

$$V(3,20) = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{20!}{17!} = 6840$$

d) Kombination mit gleichen Elementen (Reihenfolge unwichtig):

$$C(3,15) = \binom{n+m-1}{m} = \binom{17}{3} = 680$$

e) Kombination verschiedener Elemente (Reihenfolge unwichtig):

$$C(3,10) = \binom{10}{3} = 120$$

1.2.3 Satz von Bays:

$$P(A_1) = \text{Stadt} = 0,65; \quad P(A_2) = \text{Land} = 0,35; \quad \varepsilon = \text{Stammwähler}$$

$$P(\varepsilon|A_1) = 0,4; \quad P(\varepsilon|A_2) = 0,8$$

$$P(A_1|\varepsilon) = \frac{P(A_1) \cdot P(\varepsilon|A_1)}{\sum P(A_i) \cdot P(\varepsilon|A_i)} = \frac{0,65 \cdot 0,4}{0,65 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,8} = 0,481481$$

$$1.2.4 \text{ a) } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$$

$$\text{b) } \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = 0,3571$$

c) α) Mögliche Kombinationen: $V(2,5) = \frac{5!}{3!} = 20$. Günstige: 2;

$$\frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$\text{Anders: } \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{10}$$

β) Wahrscheinlichkeit, dass jedes Mal eine andere Maus gewinnt:

$$1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0,48$$

Wahrscheinlichkeit, dass jedes Mal die gleiche Maus gewinnt: $1 \cdot \frac{1^2}{5} = 0,04$

Wahrscheinlichkeit, dass eine Maus zweimal gewinnt: $1 - 0,48 - 0,04 = 0,48$

1.3.1 a) Die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort liegt bei 1/3, für eine falsche bei 2/3.

	$f(x_i)$	$f(x_i)$	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	$(2/3)^3$	0,296	8/27	8/27
1	$1/3 * (2/3)^2 * 3$	0,444	4/9	20/27
2	$(1/3)^2 * 2/3 * 3$	0,222	2/9	26/27
3	$(1/3)^3$	0,037	1/27	1

$$b) \quad p(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - \frac{20}{27} \approx 0,26$$

c)

x_i	$f(x_i) \cdot x_i$
-4	-1 5/27
-3	-1 1/3
3	2/3
4	4/27
Σ	-1 19/27

Der Erwartungswert des Gewinns liegt bei -1,70€. Somit handelt es sich bei diesem Hütchenspiel um kein faires Spiel.

$$1.3.2 \text{ a) } f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da die Wahrscheinlichkeit, dass x außerhalb des Intervalls $0 \leq x \leq a$ liegt 0 ist, muss die Wahrscheinlichkeit, dass x innerhalb dieses Intervalls liegt 1 sein.

$$1 = \int_0^a f(x) dx, \quad 1 = \int_0^a 2x^2 = \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{2}{3} a^3 - 0, \quad 1 = \frac{2}{3} a^3, \quad 1,5 = a^3, \quad 1,1447 = a$$

$$E(X) = \int x \cdot f(x) dx = \int_0^{1,1447} x \cdot (2x^2) dx = \int 2x^3 = \left[0,5x^4 \right]_0^{1,1447} = 0,8585$$

$$V(X) = \int x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \int_0^{1,1447} x^2 \cdot (2x^2) dx - \mu^2$$

$$= \int 2x^4 - \mu^2 = \left[\frac{2}{5} x^5 \right]_0^{1,1447} - 0,8585^2 = 0,049$$

$$b) \quad P(0,4 \leq x \leq 1) = \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_{0,4}^1 = \frac{2}{3} - \frac{16}{375} = 0,624$$

$$c) \quad P(x=1) = 0 \text{ (gilt für alle stetigen Verteilungen).}$$

Aufgabenblatt 2: Diskrete und stetige Verteilungen

2.1 Um welche Wahrscheinlichkeitsverteilungen handelt es sich in den folgenden Fällen, d.h. wie sind die entsprechenden Zufallsvariablen verteilt? Begründen Sie bitte kurz Ihre Antwort.

2.1.1 George Clooney nimmt bei seiner zehnten Nominierung als *bester Hauptdarsteller* das erste Mal den Oscar mit nach Hause.

2.1.2 *A Birthday Problem*: Von 400 befragten Studierenden haben zwei am 31.12. Geburtstag (auch eine Doppelbefragung ist möglich).

2.1.3 Bei fünfmaligem Ziehen (mit Zurücklegen) aus einer Urne mit vier schwarzen und fünf weißen Kugeln wird genau dreimal eine weiße Kugel gezogen.

2.1.4 Die Lebensdauer einer Glühlampe beträgt mehr als zwei Jahre.

2.2 Sie wollen auch nach Beendigung Ihre schulischen Laufbahn Ihre Schlafgewohnheiten beibehalten und möglichst lange im kuscheligen Bett verweilen. Dazu überlegen Sie sich, dass es sinnvoll wäre, sich mit den Verspätungszeiten Ihres Busses zu beschäftigen, um diese optimal auszunutzen. Folgende Angaben sind Ihnen durch einen glücklichen Zufall in die Hände geraten:

Im Mittel verspätet sich der Bus um vier Minuten, und die Varianz der Verspätung beträgt 25 Minuten. Zudem erfahren Sie, dass die Verspätungszeit normalverteilt ist.

Sie beginnen, sich folgende Daten auszurechnen:

2.2.1 $P(X < 7) = ?$

2.2.2 $P(X > 10) = ?$

2.2.3 $P(0 \leq X \leq 8) = ?$

2.2.4 Welche Verspätungszeit wird von zehn Prozent der Busse mit der meisten Verspätungszeit nicht unterschritten?

2.2.5 Welche Verspätungszeit wird von zehn Prozent der Busse mit der wenigsten Verspätungszeit nicht überschritten?

2.3 Das Forschungsinstitut Freie Berufe (auch als *die Statistiker* bekannt) ist dafür bekannt, sich nicht mit Spekulationen zufrieden zu geben. Die Mitarbeiter interessieren sich dafür, wie die BWL-Studierenden morgens in die Uni gelangen. Sie wissen, dass sich von 50 BWL-Studierenden 70% eher unsportlich ins Auto setzen, 20% Fahrrad fahren und immerhin 10% den Weg zu Fuß bewältigen. Sie sollen nun diese Forschungsarbeit unterstützen:

2.3.1 Zunächst führen Sie eine Umfrage unter sieben zufällig ausgewählten Studierenden durch (Doppelbefragungen sind möglich). Wie groß ist die

Wahrscheinlichkeit, dass Sie drei Autofahrer, drei Drahteselreiter und einen ewigen Fußgänger auswählen?

- 2.3.2** In einem zweiten Schritt führen Sie Ihre Umfrage ohne Doppelbefragungen durch. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass Sie drei Tankstellenmillionäre, drei Fahrradfahrer und einen Fußgänger auswählen?
- 2.4** Die Bedingungen für eine Prüfung werden mal wieder geändert. Nun heißt das für Sie: Eine Prüfung besteht aus 18 Multiple-Choice-Aufgaben. Jede Aufgabe verfügt über drei Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Für jede richtige Antwort erhält man einen Punkt, für jede falsche Antwort erhält man keine Punkte. Da dies für Sie eine klare Verbesserung zu dem Minus-Punkte-System bei völliger Unwissenheit darstellt, gehen Sie diesmal vollkommen unvorbereitet in die Prüfung und lösen die Aufgaben nach dem Zufallsprinzip.
- 2.4.1** Welche Punktzahl erwarten Sie? Wie groß ist die Streuung der Punktzahl?
- 2.4.2** Um die Prüfung zu bestehen benötigt man mindestens fünf Punkte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Prüfung bestehen?
- 2.4.3** Die Note 3,0 erhält man, wenn man mindestens neun und weniger als 13 Punkte hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine 3,0?
- 2.4.4** Nicht nur Ihnen ist aufgefallen, dass die Möglichkeit besteht, auch bei völliger Unwissenheit und einem Quäntchen Glück die Prüfung zu bestehen. Nun werden die Bedingungen verändert: Es werden in der nächsten Prüfung *faire* 120 Fragen gestellt. Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, die Prüfung zu bestehen (benötigt werden erneut ein Drittel aller Punkte bei gleicher Punkteverteilung wie oben)?
- 2.4.5** Es werden in einer nächsten Prüfung sogar 120 MC-Aufgaben gestellt. Zudem werden nun auch noch 20 Antwortmöglichkeiten vorgegeben, von denen wiederum nur eine richtig ist. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Prüfung bestehen (benötigt werden erneut ein Drittel aller Punkte bei gleicher Punkteverteilung wie oben)?
- 2.5** Seitdem Sie aus der WG mit Ihren Eltern ausgezogen sind, ein eigenständiges Leben führen und unglücklicherweise auch wesentlich mehr Alltägliches selbst bezahlen müssen, ist es für Sie nun wichtig, wie lange eigentlich eine handelsübliche Glühlampe durchhält. Da Sie nicht gern im Dunklen leben, besorgen Sie sich nun einige Angaben von dem Hersteller Oswald („Oswald – und die Wohnung erstrahlt in hellem Licht“). Dieser gibt an, dass eine Oswald-Birne mit 40 Watt bei normaler Verwendung eine durchschnittliche Lebensdauer von zwei Jahren hat.
Sie interessieren sich nun dafür, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass diese Glühlampe länger als drei Jahre hält.

Lösungen zu Aufgabenblatt 2: Diskrete und stetige Verteilungen

2.1.1 Geht es um die Frage wie oft ein Bernoulli-Prozeß wiederholt werden muss, bis zum ersten Mal das Ereignis A (hier gewonnener Oscar) eintritt, so handelt es sich um die geometrische Verteilung.

2.1.2 Eigentlich liegt hier eine Binomialverteilung vor, denn durch die Möglichkeit der Doppelbefragung handelt es sich um $n = 400$ unabhängige Wiederholungen eines Zufallsexperiments mit Ereignis A: hat am 31.12 Geburtstag und dem Ereignis $\bar{A}$: hat nicht am 13.12 Geburtstag. Somit ist $p=1/365$ und $q=364/365$.

Allerdings kann die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung approximiert werden, wenn gilt: $n \geq 100$ und $p \leq 0,05$.

Da beides erfüllt ist handelt es sich hier um eine Poissonverteilung.

2.1.3 Es liegt eine Binomialverteilung vor mit $n = 5$ unabhängigen Wiederholungen (ziehen mit zurücklegen), Ereignis A = ziehen einer weißen Kugel und der Eintrittswahrscheinlichkeit $p = 5/9$.

2.1.4 Bei Fragen nach der Lebensdauer eignet sich am Besten die Exponentialverteilung.

$$\mathbf{2.2.1} \quad P(X < 7) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{7 - \mu}{\sigma}\right), \text{ mit } \bar{X} = 5 \text{ und } \sigma = 5$$

$$P(X < 7) = P\left(Z < \frac{7 - 4}{5}\right) = P(Z < 0,6) = \Phi(0,6) = 0,7257$$

$$\mathbf{2.2.2} \quad P(X > 10) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{10 - \mu}{\sigma}\right), \text{ mit } \bar{X} = 5 \text{ und } \sigma = 5$$

$$P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10 - 4}{5}\right) = P\left(Z > \frac{6}{5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{6}{5}\right)$$

$$P(X > 10) = 1 - \Phi\left(\frac{6}{5}\right) = 1 - 0,8849 = 0,1151$$

$$\mathbf{2.2.3} \quad P(0 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{0 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{8 - \mu}{\sigma}\right), \text{ mit } \bar{X} = 5 \text{ und } \sigma = 5$$

$$P(0 \leq X \leq 8) = P(-0,8 \leq Z \leq 0,8)$$

$$P(0 \leq X \leq 8) = \underbrace{P(Z \leq 0,8)}_{\text{WS-Obergrenze}} - \underbrace{P(Z \leq -0,8)}_{\text{WS-Untergrenze}} = \Phi(0,8) - (1 - \Phi(0,8))$$

$$P(0 \leq X \leq 8) = 0,7881 - (1 - (0,7881)) = 0,5762$$

$$2.2.4 \quad P(X > x^*) = 0,1; \quad P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{x^* - \mu}{\sigma}\right) = 0,1$$

$$P\left(Z > \frac{x^* - \mu}{\sigma}\right) = 0,1 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{x^* - \mu}{\sigma}\right) = 1 - 0,1 \rightarrow \Phi\left(\underbrace{\frac{x^* - 4}{5}}_Z\right) = 0,9$$

$$z_{0,9} = 1,2816; \quad \left(\frac{x^* - 4}{5}\right) = 1,2816 \rightarrow x^* = 10,408$$

Die 10% der Busse mit der meisten Verspätungszeit haben mindestens 10,41 Minuten Verspätung.

$$2.2.5 \quad P(X < x^*) = 0,1; \quad P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x^* - \mu}{\sigma}\right) = 0,1$$

$$P\left(Z < \frac{x^* - 4}{5}\right) = 0,1 \rightarrow \Phi\left(\underbrace{\frac{x^* - 4}{5}}_Z\right) = 0,1$$

$$z_{0,1} = -z_{0,9} = -1,2816; \quad \left(\frac{x^* - 4}{5}\right) = -1,2816 \rightarrow x^* = -2,408$$

Die 10% der Busse mit der geringsten Verspätungszeit haben höchstens -2,041 Minuten Verspätung. Dieser Wert ist schwerlich zu interpretieren.

2.3.1 Es liegt eine Multinomialverteilung mit $n = 7$, $p_1 = 0,7$, $p_2 = 0,2$ und $p_3 = 0,1$ vor.

Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$.

$$f_M(x_1, x_2, x_3 | n, p_1, p_2, p_3) = \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot x_3!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3}$$

$$f_M(3; 3; 1 | 7; 0,7; 0,2; 0,1) = \frac{7!}{3! \cdot 3! \cdot 1!} \cdot 0,7^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,1^1$$

$$= 140 \cdot 0,343 \cdot 0,008 \cdot 0,1 = 0,038416$$

Die Wahrscheinlichkeit genau 3 Autofahrer, 3 Radfahrer und 1 Fußgänger zu ziehen liegt bei 3,84%.

2.3.2 Es liegt eine allgemeine hypergeometrische Verteilung mit $n = 7$, $N_1 = 0,7 \cdot 50 = 35$, $N_2 = 0,2 \cdot 50 = 10$, $N_3 = 0,1 \cdot 50 = 5$ und $N = 50$ vor.

Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$.

$$\begin{aligned} f_{AH}(3; 3; 1 | 7; 35; 10; 5) &= \frac{\binom{35}{3} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{50}{7}} \\ &= \frac{\left(\frac{35!}{3! \cdot (35-3)!} \right) \cdot \left(\frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} \right) \cdot \left(\frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} \right)}{\left(\frac{50!}{7! \cdot (50-7)!} \right)} \\ &= \frac{6545 \cdot 120 \cdot 5}{99.884.400} = 0,3932 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit genau 3 Autofahrer, 3 Radfahrer und 1 Fußgänger zu ziehen liegt bei 3,93%.

2.4.1 Die Punktzahl ist binomialverteilt mit $n = 18$ und $p = 0,333$

$$E(X) = n \cdot p = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6 \text{ und } \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 18 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 4$$

Durchschnittlich können Sie mit 6 richtigen Antworten rechnen.

2.4.2 $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0,3327 = 0,6673$

Die Wahrscheinlichkeit die Prüfung auf diesem Wege zu bestehen liegt bei 66,73%.

2.4.3 $P(9 \leq X < 13) = P(X < 13) - P(X \leq 8) = P(X \leq 12) - P(X \leq 8)$
 $= F(12) - F(8) = 0,9997 - 0,9404 = 0,0593$

Die Wahrscheinlichkeit mit dieser Taktik eine 3 zu schreiben, liegt bei 5,93%.

2.4.4 Die Punktzahl ist binomialverteilt mit $n = 120$ und $p = 0,333$.

Approximation durch Normalverteilung, da

$$n \cdot p \cdot (1 - p) = 120 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 26,666 > 9.$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow X \sim N(n \cdot p; n \cdot p \cdot (1 - p)) \rightarrow X \sim N(40; 26,666)$$

$$P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 40) = 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{40 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{40 - 40}{\sqrt{26,666}}\right) = 1 - \Phi(0) = 0,5$$

Die Wahrscheinlichkeit jetzt die Klausur zu bestehen liegt bei 50%.

2.4.5 Die Punktzahl ist binomialverteilt mit $n = 120$ und $p = 0,05$.

Approximation durch Poissonverteilung, da $n \geq 100$ und $p \leq 0,05$

(Approximation durch Normalverteilung nicht möglich, da $n \cdot p \cdot (1 - p) = 120 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 5,7 \leq 9$).

$$X \sim \text{PO}(\mu) \rightarrow X \sim \text{PO}(n \cdot p) \rightarrow X \sim \text{PO}(6)$$

$$P(X \geq 40) = 1 - P(X < 40) = 1 - P(X \leq 39) = 1 - F(39) = 1 - 1 = 0$$

Die Wahrscheinlichkeit nur durch Zufall die Klausur zu bestehen, sinkt auf 0%.

2.5 Es liegt eine Exponentialverteilung mit $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2 \rightarrow \lambda = 0,5$ vor.

$$X \sim E(\lambda) \rightarrow X \sim E(0,5)$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot x}) = 1 - (1 - e^{-1,5})$$

$$= 1 - (1 - 0,2231) = 1 - 0,7769 = 0,2231$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Glühlampe länger als 3 Jahre hält, liegt bei 22,31%.

Aufgabenblatt 3: Stichprobenfunktionen; Testverteilungen; Schätzfunktionen

3.1 In einer Urne befinden sich fünf Perlen. Drei davon sind wertlose Zuchtperlen, eine hat einen Wert von 50 € und die letzte Perle hat einen Wert von 100 €.

3.1.1 Berechnen Sie den erwarteten Wert einer Ziehung und die dazugehörige Varianz.

3.1.2 Sie ziehen eine Stichprobe von zwei Perlen. Bestimmen Sie unter Beachtung der Reihenfolge die Anzahl aller möglichen Anordnungen der Stichprobe, jeweils für die beiden Fälle mit und ohne Zurücklegen.

3.1.3 Stellen Sie für beide Verteilungen, d.h. für diejenige mit und ohne Zurücklegen, alle möglichen Stichprobenmittelwerte tabellarisch dar. Ermitteln Sie die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten der Stichprobenmittelwerte.

3.1.4 Berechnen Sie den Erwartungswert $E(\bar{X})$ des Stichprobenmittelwerts für beide Verteilungen. Welche allgemeine Beziehung besteht zwischen dem Erwartungswert $E(\bar{X})$ und dem Erwartungswert $E(X) = \mu_x$ der Grundgesamtheit?

3.1.5 Bestimmen Sie die Varianz $\text{Var}(\bar{X})$ des Stichprobenmittelwertes für den Fall des Ziehens mit Zurücklegen. Welche allgemeine Beziehung besteht in diesem Fall zwischen der Varianz $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma_{\bar{x}}^2$ und der Varianz $\text{Var}(X) = \sigma_x^2$ der Grundgesamtheit?

3.2 Testverteilungen

3.2.1 Die Zufallsvariable X wird aus der Summe der Quadrate von 15 unabhängigen und standardnormalverteilten Zufallsvariablen (diese sind also *i.i.d.*, d.h. *independently and identically distributed*) gebildet.

a) Wie ist X verteilt? Skizzieren Sie eine mögliche Dichtefunktion der Zufallsvariablen X .

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\text{Var}(X)$.

c) Ermitteln Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten: $P(X \leq 8,547) = ?$, $P(X > 24,996) = ?$ und $P(7,261 \leq X \leq 27,488) = ?$.

d) Für welchen Wert x gilt $P(X > x) = 0,05$?

e) Die Zufallsvariable X setzt sich nun aus der Summe der Quadrate von 450 unabhängigen und standardnormalverteilten Zufallsvariablen zusammen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(300 \leq X \leq 450) = ?$.

3.2.2 Die Zufallsvariable Z sei standardnormalverteilt ($Z \sim N(0,1)$), die Zufallsvariable U sei mit $v = 20$ Freiheitsgraden χ^2 -verteilt ($U \sim \chi^2(20)$).

a) Wie ist der Quotient $\frac{Z}{\frac{U}{\sqrt{20}}} = T$ verteilt? Skizzieren Sie eine mögliche

Dichtefunktion der Zufallsvariablen T.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(T)$ und die Varianz $\text{Var}(T)$ der Zufallsvariablen T.

c) Ermitteln Sie die folgenden Werte: $P(T \leq -0,86) = ?$, $P(T > 0,86) = ?$ und $P(-t \leq T \leq t) = 0,8$.

3.2.3 Die Zufallsvariable F sei F-verteilt mit $v_1 = 20$ Zähler- und $v_2 = 40$ Nennerfreiheitsgraden ($F \sim F(v_1, v_2)$).

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(F)$ und die Varianz $\text{Var}(F)$. Skizzieren Sie eine mögliche Dichtefunktion der Zufallsvariablen F.

b) Für welchen Wert gilt $P(F \leq f) = 0,975$ bzw. $P(F \leq f) = 0,01$?

3.3 Specify desirable characteristics of estimators and give respective examples.

3.4 Im Juni 2006 beginnt die Fußball-Weltmeisterschaft, und der Nationaltrainer von D. bittet Sie um Ihren Rat: Nachdem in D. ein Torwartproblem gelöst wurde, hat man nun ein Elfmeterproblem. Sie sollen nun Erkenntnisse über die Nervenstärke der Spieler gewinnen.

Hierfür ziehen Sie eine Stichprobe, indem Sie fünf Spieler jeweils zehn Elfmeter schießen lassen. Es ergaben sich folgende Trefferhäufigkeiten der fünf Spieler: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 8, 3, 6, 4)$. Sie nehmen an, dass die Trefferanzahl exponentialverteilt sei.

3.4.1 Bestimmen Sie zunächst eine geeignete Schätzfunktion, um den unbekannten Parameter λ zu schätzen.

3.4.2 Schätzen Sie nun den unbekannten Parameter λ auf Basis der vorliegenden Stichprobe.

3.4.3 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler mehr als 70% seiner geschossenen Elfmeter (also mehr als sieben von zehn) ins Tor schießt?

Lösungen zum Aufgabenblatt 3

3.1.1 Erwartungswert des gezogenen Perlenwertes:

$$\mu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x = \frac{1}{5} \cdot (0 + 0 + 0 + 50 + 100) = 30\text{€}$$

Der durchschnittlich erwartete Wert beträgt 30 € pro Ziehung.

Varianz des Perlenwertes:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x^2 - \mu^2 = \frac{1}{5} \cdot (0^2 + 0^2 + 0^2 + 50^2 + 100^2) - 30^2 = 1600$$

Die zu erwartende quadrierte Streuung der Perlenwerte beträgt 1600.

3.1.2 a) Variation mit Zurücklegen: $\bar{V}(2,5) = n^m = 5^2 = 25$

$$\text{b) Variation ohne Zurücklegen: } V(2,5) = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

3.1.3

1.Perle / 2.Perle	0	0	0	50	100
0	(0)	0	0	25	50
0	0	(0)	0	25	50
0	0	0	(0)	25	50
50	25	25	25	(50)	75
100	50	50	50	75	(100)

Die in Klammern gesetzten Werte gelten nur für die Variante mit Zurücklegen.

a) mit Zurücklegen:

$\bar{x}$	0	25	50	75	100
$P(\bar{X} = \bar{x})$	9/25	6/25	7/25	2/25	1/25

b) ohne Zurücklegen:

$\bar{x}$	0	25	50	75
$P(\bar{X} = \bar{x})$	6/20	6/20	6/20	2/20

3.1.4 Erwartungswert der Stichprobenmittelwertverteilung:

a) mit Zurücklegen:

$$E(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \bar{x} \cdot f(\bar{x}) = 0 \cdot \frac{9}{25} + 25 \cdot \frac{6}{25} + 50 \cdot \frac{7}{25} + 75 \cdot \frac{2}{25} + 100 \cdot \frac{1}{25} = 30$$

b) ohne Zurücklegen:

$$E(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \bar{x} \cdot f(\bar{x}) = 0 \cdot \frac{6}{20} + 25 \cdot \frac{6}{20} + 50 \cdot \frac{6}{20} + 75 \cdot \frac{2}{20} = 30$$

In beiden Fällen gilt: $E(\bar{X}) = \mu = 30$ **3.1.5 Varianz der Stichprobenmittelwertverteilung:**

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \cdot f(\bar{x}) - E(\bar{X}^2)$$

$$= 0^2 \cdot \frac{9}{25} + 25^2 \cdot \frac{6}{25} + 50^2 \cdot \frac{7}{25} + 75^2 \cdot \frac{2}{25} + 100^2 \cdot \frac{1}{25} - 30^2 = 800$$

$$\text{Allgemeine Beziehung: } \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1600}{2} = 800$$

3.2.1 a) Die Zufallsvariable X ist χ^2 -verteilt mit $v=15$ Freiheitsgraden. Grafik siehe Skript.b) $E(X) = v = 15$ und $\text{VAR}(X) = 2v = 30$ c) $P(X \leq 8,547) = 0,1$

$$P(X > 24,996) = 1 - P(X \leq 24,996) = 1 - 0,95 = 0,05$$

$$P(7,261 \leq X \leq 27,488) = P(X \leq 27,488) - P(X \leq 7,261) \\ = 0,975 - 0,05 = 0,925$$

d) $P(X > x) = 0,05 \rightarrow P(X \leq x) = 0,95 \rightarrow x = 24,996$ e) Approximation der χ^2 -Verteilung durch die Normalverteilung, da $v > 100$.

$$X \sim N(v, \sqrt{2v}) = N(450, \sqrt{2 \cdot 450}) = N(450; 30)$$

$$P(300 \leq X \leq 450) = P\left(\frac{300 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{450 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(300 \leq X \leq 450) = P(-5 \leq Z \leq 0)$$

$$P(300 \leq X \leq 450) = \underbrace{P(Z \leq 0)}_{\text{WS-Obergrenze}} - \underbrace{P(Z \leq -5)}_{\text{WS-Untergrenze}} = \Phi(0) - (1 - \Phi(5))$$

$$P(300 \leq X \leq 450) = 0,5 - (1 - (1)) = 0,5$$

3.2.2 a) Die Zufallsvariable T ist student-verteilt mit $v=20$ Freiheitsgraden. Grafik siehe Skript.b) $E(T)=0$ und $\text{VAR}(T) = v/(v-2) = 20/18 = 1,111$

$$\begin{aligned}
c) \quad P(T \leq -0,86) &= 1 - P(T \leq 0,86) = 1 - 0,8 = 0,2 \\
P(T > 0,86) &= 1 - P(T \leq 0,86) = 1 - 0,8 = 0,2 \\
P(-t \leq T \leq t) &= P(T \leq t) - P(T \leq -t) = P(T \leq t) - (1 - P(T \leq t)) = 0,8 \\
2 \cdot P(T \leq t) - 1 &= 0,8 \rightarrow P(T \leq t) = 0,9 \rightarrow t = 1,3253
\end{aligned}$$

3.2.3 a) $E(F) = v_2 / (v_2 - 2)$, für $v_2 > 2$; $E(F) = 40 / (40 - 2) = 1,0526$

$$\begin{aligned}
\text{VAR}(F) &= \frac{[2 \cdot v_2^2 \cdot (v_1 + v_2 - 2)]}{[v_1 \cdot (v_2 - 2)^2 \cdot (v_2 - 4)]}, \text{ für } v_2 > 4 \\
&= \frac{[2 \cdot 40^2 \cdot (20 + 40 - 2)]}{[20 \cdot (40 - 2)^2 \cdot (40 - 4)]} = \frac{185600}{1039680} = 0,1785
\end{aligned}$$

Grafik siehe Skript.

b) $P(F \leq f) = 0,975$; $f = F(v_1; v_2; a) = F(20; 40; 0,975) = 2,068$
 $P(F \leq f) = 0,01$; $f = 1 / F(v_2; v_1; 1-a) = 1 / F(40; 20; 0,99) = 1 / 2,695 = 0,3711$

3.3 Erwartungstreue: Der Erwartungswert der Schätzfunktion entspricht dem wahren Wert.

Effizienz: Relative: Die Streuung (Varianz) einer erwartungstreuen Schätzfunktion ist kleiner als die einer anderen.
 Absolute: Die Streuung (Varianz) einer erwartungstreuen Schätzfunktion ist kleiner als die ALLER anderen.

3.4.1 Maximum Likelihood

1. Verteilung der Zufallsvariablen: X : „Anzahl Treffer“; $X \sim E(\lambda)$;
 Wahrscheinlichkeitsdichte:
 $f(x_i) = \lambda \cdot e^{-\lambda x_i}$

2. Likelihoodfunktion (Wahrscheinlichkeit, die konkrete SP zu ziehen):

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i) \rightarrow L = \prod_{i=1}^n \lambda \cdot e^{-\lambda x_i}$$

3. Log-Likelihoodfunktion:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \sum_{i=1}^n \ln[f(x_i)] = \sum_{i=1}^n \ln[\lambda \cdot e^{-\lambda x_i}] = \sum_{i=1}^n [\ln(\lambda) - \lambda x_i \cdot \ln(e)] \\
&= \sum_{i=1}^n \ln(\lambda) - \sum_{i=1}^n \lambda x_i = n \cdot \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i
\end{aligned}$$

4. Berechnung des Maximums :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = n \cdot \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow n \cdot \frac{1}{\hat{\lambda}} = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\rightarrow \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\rightarrow \frac{1}{\hat{\lambda}} = \bar{x}$$

$$\rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\text{3.4.2 } \bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{5} \cdot (4 + 8 + 3 + 6 + 4) = 5 \quad \rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{5}$$

3.4.3 Verteilungsfunktion : $F(x_i) = 1 - e^{-0,2x_i}$

$$P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F(7) = 1 - [1 - e^{-0,2 \cdot 7}] = 0,2466$$

Aufgabenblatt 4: Intervallschätzung

- 4.1** Seit Jahren beobachten Sie die Altersstruktur in den Statistik-Vorlesungen und wissen daher, dass das Alter von Studierenden mit einer Standardabweichung von $\sigma = 1,6$ normalverteilt ist. Sie haben in diesem Jahr 64 Studierende der Vorlesung nach ihrem Alter gefragt. Da Sie sich Gesichter schon immer schlecht merken konnten, ist es möglich, dass Sie einige auch mehrfach gefragt haben. Das Durchschnittsalter der Befragten liegt bei 23 Jahren.
- 4.1.1** In welchem Konfidenzintervall liegt das mittlere Alter μ mit 99-prozentiger Sicherheit? Berechnen Sie das gesuchte Konfidenzintervall.
- 4.1.2** Wie verändert sich das Konfidenzintervall, wenn Sie nur 16 Studierende befragen? Wovon hängt die Größe des Konfidenzintervalls noch ab?
- 4.1.3** Neben der Altersstruktur in der Statistik-Vorlesung interessieren Sie sich auch für die Altersstrukturen in Vorlesungen anderer Studiengänge. Dieses Jahr wollen Sie zum ersten Mal die Vorlesung zur Wirtschaftspädagogik mit in Ihre Studien aufnehmen. Sie befragen 26 Studierende, die an dieser Vorlesung teilnehmen, und errechnen ein Durchschnittsalter von 24 Jahren und eine Standardabweichung von $s = 2,5$ Jahren.
Berechnen Sie ein Konfidenzintervall, wobei Ihnen diesmal ein Konfidenzniveau in Höhe von 95 Prozent bei der Berechnung des Intervalls für das mittlere Alter μ reicht.
- 4.2** Sie erwarten Ihre gesamte Verwandtschaft zum Kaffeetrinken. Da Sie nicht zu den besten Bäckern gehören, entschließen Sie sich, die Berliner beim Bäcker um die Ecke zu bestellen. Zu Ihrer Überraschung sind die gelieferten Berliner unterschiedlich groß. Da Sie durch und durch Statistiker sind, wollen Sie der Sache auf den Grund gehen und wiegen die 70 Berliner eines Blechs aus. Das von Ihnen ermittelte Durchschnittsgewicht liegt bei 100 Gramm bei einer Standardabweichung von $s = 10$ Gramm.
- 4.2.1** Sie rufen umgehend bei der Bäckerei an, um von den Größenunterschieden der Berliner zu berichten. Zu Ihrer Überraschung interessiert sich auch der Bäcker für dieses Problem. Bäckermeister Müller berichtet, dass der Teigportionierer Gewichte liefert, die annähernd normalverteilt sind, und dass er bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,01$ gerne das Konfidenzintervall der Varianz der Gewichte kennen würde. Leider weiß Herr Müller aber nicht wie man das macht. Sie bieten ihm gegen einen geringen Preisnachlass an, dieses für ihn zu erledigen.
- 4.2.2** Die Probleme mit den Berlinern nehmen kein Ende. Zehn der 100 verzehrten Berliner waren nicht wie bestellt mit Erdbeermarmelade sondern mit Pflaumenmus gefüllt. Genervt machen Sie sich gleich an die Arbeit, denn sie wollen wissen, in welchem Konfidenzintervall der Anteil der falsch gefüllten Berliner liegt. Sie gehen von einer Irrtumswahrscheinlichkeit von drei Prozent aus.

- 4.2.3** Sie sind erbost über die Höhe des Konfidenzintervalls, wo Ihre Verwandtschaft doch kein Pflaumenmus mag. Erneut kontaktieren Sie den Bäckermeister und schildern ihm Ihr Problem. Herr Müller erklärt Ihnen, dass höchstens zwei Prozent der Berliner falsch gefüllt sein können, da dieses so in der Gebrauchsanweisung der Befüllungsmaschine steht. Was sagen Sie zu dieser Aussage?
- 4.2.4** Wie viele Berliner müssten zusätzlich überprüft werden, um das Konfidenzintervall auf höchstens acht Prozent Spannweite zu reduzieren?
- 4.2.5** Der Bäcker bekommt doch ein schlechtes Gewissen und liefert Ihnen 200 neue Berliner. Er versichert Ihnen, dass die Befüllungsmaschine ausgetauscht wurde. Ihre Verwandtschaft stürzt sich gleich auf die Berliner und stellt fest, dass von den 200 neuen Berlinern nur noch zehn falsch gefüllt sind. Sie fragen sich, ob tatsächlich davon auszugehen ist, dass die neuen Berliner auf einer anderen Maschine befüllt wurden ($\alpha = 0,05$).
- 4.3** Welche der folgenden Aussagen über ein 99 Prozent Konfidenzintervall für die Differenz zweier Anteilswerte sind richtig?
- a) Wenn α abnimmt, so wird das Konfidenzintervall breiter.
 - b) Ein 90 Prozent Konfidenzintervall ist breiter als ein 95 Prozent Konfidenzintervall.
 - c) Mit einer Wahrscheinlichkeit von einem Prozent liegt die Differenz der beiden Anteilswerte außerhalb des Konfidenzintervalls.
 - d) Ist eine Seite des Konfidenzintervalls negativ, kann man sagen, dass die Anteilswerte mit einer Sicherheit von 99 Prozent verschieden sind.

Lösungen zu Aufgabenblatt 4: Intervallschätzung

4.1.1 Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ^2 der normal verteilten Grundgesamtheit.

$$P(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{X}}) = 1 - \alpha$$

$$E(\bar{X}) = \mu; \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}; \quad \alpha = 0,01$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,6}{\sqrt{64}} = 0,2 \text{ (ziehen mit Zurücklegen, somit keine Korrektur nötig)}$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,995} = 2,5758$$

$$P(23 - 2,5758 \cdot 0,2 \leq \mu \leq 23 + 2,5758 \cdot 0,2) = 99\%$$

$$P(22,4848 \leq \mu \leq 23,5151) = 99\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% liegt das mittlere Alter der Studenten, die die Statistik Vorlesung besuchen zwischen 22,5 und 23,5 Jahren.

4.1.2 Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ^2 der normal verteilten Grundgesamtheit.

$$P(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{X}}) = 1 - \alpha$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,6}{\sqrt{16}} = 0,4 \text{ (ziehen mit Zurücklegen, somit keine Korrektur nötig)}$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,995} = 2,5758$$

$$P(23 - 2,5758 \cdot 0,4 \leq \mu \leq 23 + 2,5758 \cdot 0,4) = 99\%$$

$$P(21,9697 \leq \mu \leq 24,03) = 99\%$$

Bei einem kleineren n wird das Intervall breiter, da $\sigma_{\bar{X}}$ größer wird. Neben der Standardabweichung ist das Intervall auch von der Irrtumswahrscheinlichkeit α abhängig. Je größer α , desto schmaler wird das Intervall.

4.1.3 Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz der Grundgesamtheit.

$$P(\bar{X} - t \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + t \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}}) = 1 - \alpha$$

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{2,5}{\sqrt{25}} = 0,5 \text{ (ziehen mit Zurücklegen, somit keine Korrektur nötig)}$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}, v} = t_{0,975, 25} = 2,0595$$

$$P(24 - 2,0595 \cdot 0,5 \leq \mu \leq 24 + 2,0595 \cdot 0,5) = 95\%$$

$$P(22,97 \leq \mu \leq 25,03) = 95\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt das mittlere Alter der Studenten, die die Wirtschaftspädagogik Vorlesung besuchen zwischen 23 und 25 Jahren.

4.2.1 Konfidenzintervall für die Varianz

$$P\left(\frac{n \cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{n \cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

$$n = 70, s^2 = 10^2 = 100, \alpha = 0,01, \chi^2_{0,005, 69} = 42,494, \chi^2_{0,995, 69} = 102,996$$

$$P\left(\frac{70 \cdot 100}{102,996} \leq \sigma^2 \leq \frac{70 \cdot 100}{42,494}\right) = 99\%$$

$$P(67,96 \leq \sigma^2 \leq 164,73) = 99\%$$

Zu 99% liegt die Varianz der Gewichte der Berliner zwischen 67,96 und 164,73 Gramm.

4.2.2 Konfidenzintervall für den Anteilswert

Da $(n \cdot p \cdot (1-p) \geq 9)$ erfüllt ist, kann die Normalverteilung angenommen werden (sonst Binomialverteilung nötig).

$$P(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{p}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{p}}) = 1 - \alpha$$

$$\hat{p} = \frac{p}{n} = \frac{10}{100} = 0,1; \alpha = 0,03; z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,985} = 2,1701$$

Es werden unendlich viele Berliner produziert, somit wird das Modell mit Zurücklegen angenommen.

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{100}} = 0,03$$

$$P(0,1 - 2,1701 \cdot 0,03 \leq p \leq 0,1 + 2,1701 \cdot 0,03) = 97\%$$

$$P(0,0349 \leq p \leq 0,1651) = 97\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 97% liegt der Anteil der Berliner mit Pflaumenmus zwischen 3,5% und 16,5%.

4.2.3 Der Bäcker behauptet, dass höchstens 2% der Berliner falsch gefüllt sind. Bei unserer Probe lag das p für eine falsche Füllung bei 10% und mit 97% Sicherheit in einem Intervall zwischen 3,5% und 16,5%, folglich über der Behauptung von 2% der Bäckers. Seine Aussage ist somit stark anzuzweifeln.

4.2.4 Bestimmung des notwendigen Stichprobenumfangs

$$n = \frac{z^2 \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{(\Delta p)^2} = \frac{2,17012 \cdot 0,1 \cdot 0,9}{0,04^2} = 264,9 = 265$$

$$\Delta p = \frac{0,08}{2} = 0,04 \text{ (halbes Intervall)}$$

$$265 - 100 = 165 \text{ (n-benötigt - n-vorhanden)}$$

Um das Intervall auf höchstens 8% zu reduzieren, müssen 165 weitere Berliner getestet werden.

4.2.5 Konfidenzintervall für die Differenz zweier Anteilswerte

$$\text{Bedingung: } n_1 \cdot \hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1) \geq 9 = 100 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 9$$

$$n_2 \cdot \hat{p}_2 \cdot (1 - \hat{p}_2) \geq 9 = 200 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 9,5$$

$$P\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z \cdot \hat{\sigma}_d \leq p_1 - p_2 \leq (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z \cdot \hat{\sigma}_d\right] = 1 - \alpha$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_d^2 &= \frac{p_1 \cdot (1 - p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1 - p_2)}{n_2} \\ &= \frac{0,1 \cdot 0,9}{100} + \frac{0,05 \cdot 0,95}{200} = 0,0009 + 0,0002375 = 0,00114 \end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}_d = \sqrt{0,00114} = 0,03376; \quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0,1 - 0,05 = 0,05; \quad \alpha = 0,05$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975} = 1,96$$

$$P(0,05 - 1,96 \cdot 0,03376 \leq p_1 - p_2 \leq 0,05 + 1,96 \cdot 0,03376) = 95\%$$

$$P(-0,01617 \leq p_1 - p_2 \leq 0,1162) = 95\%$$

Mit 95% sind die beiden Werte nicht signifikant verschieden, darum ist nicht davon auszugehen, dass sie auf verschiedenen Maschinen gefüllt wurden.

- 4.3**
- a) Richtig. Wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit abnimmt, nimmt die Prognosesicherheit $(1-\alpha)$ zu und die Aussage über den Wertebereich des zu schätzenden Parameters ungenauer.
 - b) Falsch. Ein 95% Konfidenzintervall ist aus den in a) genannten Gründen größer als ein 90% Konfidenzintervall.
 - c) Richtig. Ein 99% Konfidenzintervall gibt den Wertebereich an, in dem sich der Parameter mit 99% Sicherheit befindet. Somit liegt die Wahrscheinlichkeit, dass er außerhalb dieses Wertebereichs liegt bei $\alpha = 1\%$.
 - d) Falsch. Eine solche Aussage ist nur möglich, wenn beide Seiten des Konfidenzintervalls das gleiche Vorzeichen aufweisen.

Aufgabenblatt 5: Parametertests

- 5.1 Nach Angaben von Campus-Germany, einem gemeinsamen Internetportal von DAAD und Deutscher Welle liegt die durchschnittliche Monatsmiete in Lüneburg bei (rund) 240,00€. Eine im letzten Semester im Rahmen der Statistik I Vorlesung durchgeführte Befragung unter Lüneburger Studenten ergab eine durchschnittliche Monatsmiete von 316,44€ bei einer Stichprobengröße von 144 Personen und einer Standardabweichung von 129,58 (die Varianz der Grundgesamtheit ist nicht bekannt). Sie vermuten daher, dass die Angaben von Campus-Germany veraltet sind und die tatsächliche Monatsmiete im Jahr 2004 höher war.

Überprüfen Sie Ihre Vermutung mit einem geeigneten Testverfahren. Achten Sie dabei insbesondere auf die Formulierung der Null- und Alternativhypothese. Die Entscheidung soll bei 95% Sicherheit getroffen werden.

Gehen Sie in dieser und in den folgenden Aufgaben davon aus, dass Mehrfachbefragungen einzelner Studenten möglich waren, diese also *mit Zurücklegen* gezogen wurden.

- 5.2 Ein Kommilitone äußert sich in Ihrer Gegenwart verächtlich über „diese Erstkinder, von denen garantiert die Hälfte noch zu Hause wohnt“. Nachdem Sie den ob dieser himmelschreienden Pauschalisierung und Diffamierung aufkeimenden Ärger heruntergeschluckt haben, entscheiden Sie sich auf den einzig haltvollen Teil seiner Aussage einzugehen – den Anteil der bei ihren Eltern wohnenden Studenten. Prüfen Sie mit Hilfe der bereits erwähnten Umfrage die Hypothese, dass der Anteil der bei ihren Eltern wohnenden Studenten nicht 50% ist ($\alpha = 0,05$). Von 200 befragten Studenten gaben im Jahr 2004 52 an bei ihren Eltern zu wohnen.

- 5.3 Sie vermuten, dass sich die Monatsmiete pro Quadratmeter in WGs und Einzelwohnungen unterscheidet. Da Sie unsicher sind, ob sich die Besonderheiten beider Wohnformen (Ruhe, Geselligkeit, betrunkenen Mitbewohner, Putzstreits,...) positiv oder negativ in den Mietpreisen niederschlagen, möchten Sie die Vermutung überprüfen, dass die Mieten unterschiedlich hoch sind. Die folgende Tabelle enthält einige deskriptive Informationen zu beiden Wohnformen. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Mieten pro m² in den jeweiligen Grundgesamtheiten normalverteilt sind.

	Allein	WG
Stichprobe n	41	51
Mittelwert	9,62	12,91
Varianz	3,906	35,149

- 5.3.1** Die im Rahmen der Vorlesung behandelten Tests auf Mittelwertgleichheit erfordern eine Annahme bezüglich der Varianz der Grundgesamtheit (gleiche Varianzen, ungleiche Varianzen), sofern diese nicht bekannt sind. Treffen Sie auf Grundlage eines Testverfahrens für die Varianz eine Entscheidung bezüglich des anzuwendenden Mittelwerttests ($\alpha = 0,01$).
- 5.3.2** Überprüfen Sie die Vermutung, dass sich die Höhe der Mieten pro m² zwischen Einzelwohnungen und WGs unterscheidet. Treffen Sie die Entscheidung bei 95% Sicherheit.
- 5.4** Ein Bekannter, der in Hamburg Soziologie studiert, untersucht in einer Seminararbeit „studentisches Wohnen in Zeiten der Stadtflucht“. Er geht davon aus, dass „die schleichende Vereinsamung der Studenten in der Stadt“ sich in einem höheren Anteil allein wohnender Studenten niederschlägt (verglichen mit dem Anteil der in Vororten oder weiter außerhalb allein wohnender Studenten). Da er nun die Veranstaltungen zu empirischer Sozialforschung genauso oft geschwänzt hat, wie er die kultursoziologischen Vorlesungen besucht hat, steht er vor einem für ihn unlösbaren Problem. Auch wenn Sie als Ökonomen ernste Zweifel an seiner Theorie haben und eher vermuten, dass die höheren Mieten in der Stadt Studenten in andere Wohnformen zwingen, erklären Sie sich doch bereit ihn in seinem Vorhaben zu unterstützen. Ein Blick in ihre Daten ergibt, dass von 150 befragten Studenten, die angaben in der Stadt zu wohnen, 42 alleine wohnen. Von den 112 außerhalb wohnenden Studenten leben 14 alleine. Überprüfen Sie die Vermutung Ihres Bekannten mit Hilfe eines geeigneten Testverfahrens ($\alpha = 0,01$). Achten Sie besonders auf die Formulierung von Null- und Alternativhypothese!
- 5.5** Sammelsurium
- Was ist die Grundidee hinter statistischen Tests?
 - Was versteht man unter dem α -(Fehler 1.Art) und β -Fehler (Fehler 2. Art)? Worin besteht der Unterschied zwischen den beiden Fehlerarten?
 - Wann wird eine Nullhypothese abgelehnt?
 - Aus welchen fünf Schritten besteht ein statistischer Test?

Lösungen zum Aufgabenblatt 5: Parametertests

5.1 Einstichprobentest für μ bei unbekannter σ^2

Schritt 1: $\mu \in \mathbb{R}^+$ $\alpha=0,05$
 rechtsseitiger Test: $H_0: \mu \leq 240$
 $H_A: \mu > 240$

Schritt 2: Voraussetzungen überprüfen:
 $n > 30 \rightarrow \text{OK!}$

Prüfgröße (σ^2 unbekannt)

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}} \sim t(n-1) \quad (\text{unter } H_0)$$

Schritt 3: $t_{crit} = t_{1-\alpha; n-1} = t_{0,95; 143}$
Da $n \geq 30$: Approx. durch $N(0;1) \rightarrow z_{0,95} = 1,6449$
 $\rightarrow KB: [1,6449; +\infty[$

Schritt 4: $T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}}$ wobei $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{129,58}{\sqrt{143}} = 10,836$
 $T = \frac{316,44 - 240}{10,836} = 7,0543$

Schritt 5: Der Vergleich ergibt, dass $T \in KB$. Damit kann die Nullhypothese verworfen werden. Mit 95%iger Sicherheit liegt die durchschnittliche Monatsmiete in Lüneburg über 240,00€.

5.2 Einstichprobentest für den Anteilswert

Schritt 1: $p \in [0;1]$ $\alpha=0,05$
 zweiseitiger Test: $H_0: p = 0,5$
 $H_A: p \neq 0,5$

Schritt 2: Voraussetzungen überprüfen:
 $n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0) \geq 9 \rightarrow 200 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 50 \geq 9 \rightarrow \text{OK!}$

Prüfgröße:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}} \sim N(0,1) \quad (\text{unter } H_0)$$

Schritt 3: $z_{critU} = z_{\alpha/2} = z_{0,025} = -z_{0,975} = -1,96$ $z_{critO} = z_{1-\alpha/2} = z_{0,975} = 1,96$
 $\rightarrow KB:]-\infty; -1,96] \cup [1,96; +\infty[$

Schritt 4: $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}}$ wobei $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{200}} = 0,0354$

$$Z = \frac{\frac{52}{200} - 0,5}{0,0354} = -6,7882$$

Schritt 5: Der Vergleich ergibt, dass $Z \in KB$. Die Nullhypothese kann somit verworfen werden. Mit 95% Sicherheit ist der Anteil der bei ihren Eltern lebenden Studenten ungleich 50%.

5.3.1 Test auf Varianzhomogenität (Zweistichprobentest für den Quotienten zweier Varianzen)

Schritt 1: Parametermenge: $\Theta = (IR^+)^2$

Zweiseitiger Tests:

Nullhypothese: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ (bzw.: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

Alternativhypothese: $H_A: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ (bzw.: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,01$

Schritt 2: Voraussetzungen überprüfen:

I) $X_1; X_2 \sim N \rightarrow OK!$

II) *Stichproben unabhängig* $\rightarrow OK!$

Prüfgröße:

$$F = \frac{n_1 \cdot S_1^2 / (n_1 - 1)}{n_2 \cdot S_2^2 / (n_2 - 1)} \sim F(n_1 - 1; n_2 - 1) \quad (\text{unter } H_0)$$

$SP_1 = \text{„allein lebend“}$ und $SP_2 = \text{„WG“}$

Schritt 3: $F_{critO} = F_{1-\alpha/2; n_1-1; n_2-1} = F_{0,995; 40; 50} = 2,164$

$$F_{critU} = F_{\alpha/2; n_1-1; n_2-1} = F_{0,005; 40; 50} = \frac{1}{F_{0,995; 50; 40}} = 0,448$$

$\rightarrow KB: [0; 0,448] \cup [2,164; +\infty[$

Schritt 4: $F = \frac{n_1 \cdot S_1^2 / (n_1 - 1)}{n_2 \cdot S_2^2 / (n_2 - 1)} = \frac{41 \cdot 3,906 / (41 - 1)}{51 \cdot 35,149 / (51 - 1)} = 0,1117$

Schritt 5: $F \in KB$, H_0 wird abgelehnt. Mit 99% Wahrscheinlichkeit sind die Varianzen der Mieten unterschiedlich, so dass ein Mittelwertvergleichstest für unbekannte, unterschiedliche Varianzen nötig ist.

5.3.2 Zweistichprobentest für die Differenz zweier arithmetischer Mittel bei unbekannter, ungleicher Varianz.

Schritt 1: Parametermenge: $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{R}$

Zweiseitiger Tests:

Nullhypothese: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ oder $\mu_1 = \mu_2$

Alternativhypothese: $H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ oder $\mu_1 \neq \mu_2$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

SP_1 = „allein lebend“ und SP_2 = „WG“

Schritt 2: Voraussetzungen überprüfen:

I) $n_1; n_2 > 30 \rightarrow OK!$

II) *Stichproben unabhängig* $\rightarrow OK!$

Prüfgröße:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \sim t(v^*) \quad (\text{unter } H_0)$$

$$\text{Mit } v^* = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{(0,09765 + 0,70298)^2}{\frac{(0,09765)^2}{40} + \frac{(0,70298)^2}{50}} = 63,328$$

Abrunden: $v^* = 63$

Schritt 3: Da $v \geq 30$: Approx. durch $N(0;1)$

$$t_{\text{crit}U} = z_{0,025} = -1,96 \quad t_{\text{crit}U} = z_{0,975} = 1,96$$

$$\rightarrow KB:]-\infty; -1,96] \cup [1,96; +\infty[$$

$$\text{Schritt 4: } T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} = \frac{9,62 - 12,91}{\sqrt{\frac{3,906}{41 - 1} + \frac{35,149}{51 - 1}}} = -3,677$$

Schritt 5: $T \in KB$, H_0 kann verworfen werden. Es kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % davon ausgegangen werden, dass sich die Höhe der Miete pro m² zwischen Einzelwohnungen und WGs unterscheidet.

5.4 Zweistichprobentest für die Differenz zweier Anteilswerte

Schritt 1: Parametermenge: $\Theta = [-1,1]$

Rechtsseitiger Test:

Nullhypothese: $H_0: p_1 \leq p_2$

Alternativhypothese: $H_A: p_1 > p_2$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,01$

SP_1 = „Stadtbewohner“ und SP_2 = „Bewohner des Umlandes“

Schritt 2: Voraussetzungen überprüfen:

$$I) \quad n \cdot \hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1) = 150 \cdot \frac{42}{150} \cdot \frac{108}{150} = 30,24 \geq 9 \rightarrow OK!$$

$$n \cdot \hat{p}_2 \cdot (1 - \hat{p}_2) = 112 \cdot \frac{14}{112} \cdot \frac{98}{112} = 12,25 \geq 9 \rightarrow OK!$$

II) *Stichproben unabhängig* $\rightarrow OK!$

Prüfgröße:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \sim N(0;1) \quad (\text{unter } H_0)$$

$$\text{Mit } \hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

Schritt 3: $z_{crit} = z_{1-\alpha} = z_{0,99} = 2,3263$

$\rightarrow KB: [2,3263; +\infty[$

$$\text{Schritt 4: } Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

Wobei $\hat{p}_1 = \frac{42}{150} = 0,28$; $\hat{p}_2 = \frac{14}{112} = 0,125$ und

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{150 \cdot \frac{42}{150} + 112 \cdot \frac{14}{112}}{150 + 112} = 0,214$$

$$Z = \frac{0,28 - 0,125}{\sqrt{0,214 \cdot (1 - 0,214)}} \cdot \sqrt{\frac{150 \cdot 112}{150 + 112}} = 3,0277$$

Schritt 5: H_0 ablehnen. Es kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% davon ausgegangen werden, dass der Anteil der alleine wohnenden Studenten in der Stadt höher liegt als auf dem Land. Die empirischen Fakten widersprechen der Theorie Ihres Bekannten also nicht.

- 5.5 a) Ein Parametertest wird durchgeführt, um eine Hypothese über die Ausprägung eines Parameters der Grundgesamtheit (z.B. Erwartungswert, Anteilswert oder Varianz) mit Hilfe einer Stichprobe zu überprüfen.
- b) Auf Basis der Stichprobenergebnisse kann eine Hypothese (H_0), die in Wahrheit richtig ist, durch einen Test abgelehnt werden. Dabei spricht man von dem Fehler 1. Art. Die Wahrscheinlichkeit für diese Fehlentscheidungen heißt auch Irrtumswahrscheinlichkeit oder Signifikanzniveau α .
Die Entscheidung, eine in Wahrheit falsche Hypothese (H_0) beizubehalten, ist der Fehler 2. Art. Diese Wahrscheinlichkeit β für diesen Fehler wird groß, wenn ein sehr kleines α gewählt wird und/oder die Parameter von Null- und Alternativhypothese dicht beieinander liegen.
- c) H_0 wird abgelehnt, wenn die Prüfgröße innerhalb des kritischen Bereichs liegt. Ist dies der Fall, so kann man sagen, dass H_A mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - \alpha)$ wahr ist.
- d) 1. Formulierung der Null- und Alternativhypothese, Definition der Parametermenge und des Signifikanzniveaus.
2. Festlegung der Testverteilung des Stichprobenparameters und Ermittlung der Prüfgröße.
3. Ermittlung des kritischen Bereiches (Ablehnungsbereich der Nullhypothese).
4. Berechnung der Prüfgröße
5. Entscheidung über die Annahme oder Ablehnung der Nullhypothese. Wenn die Prüfgröße im kritischen Bereich liegt, wird H_0 abgelehnt.

Aufgabenblatt 6: Zweistichprobentests, Anpassungstests

- 6.1** Der Programmdirektor des TV-Senders FDZ möchte mehr über die Sport-Fernsehgewohnheiten des Publikums zur Zeit der WM 2006 wissen. Eine Umfrage ergab, dass 27% der weiblichen und 31% der männlichen Zuschauer das Spiel UdSSR-DDR gesehen haben. Es wurden 100 Frauen und 80 Männer befragt. Wird die Vermutung, dass Fußball bei Männern besser ankommt als bei Frauen, durch die Umfrage bestätigt ($\alpha = 0,05$)?
- 6.2** Als großer Fan interessiert Sie, ob die Produktionskosten der Pferdesendung „GUTES REITEN SCHLECHTES REITEN“ pro Folge normalverteilt mit $\mu = 25$ und $\sigma = 1$ sind ($\alpha = 0,1$). Sie erhalten Angaben über die Produktionskosten (in Tsd. €) für die letzte Staffel:

25,1	25,0	23,5	25,7	26,1
26,4	24,1	23,1	26,3	25,6

- 6.3** Die Tabakindustrie beauftragt Sie, eine Zielgruppenanalyse durchzuführen. Sie vermuten nun, dass die Anzahl konsumierter Zigaretten (SPSS-Variablenname: ANZZIG) durch das Alter von Jugendlichen (SPSS-Variablenname: ALTER) erklärt werden kann. Sie fragen zufällig 600 Jugendliche, wie viele Zigaretten sie täglich konsumieren, und führen anschließend eine Regressionsanalyse durch. SPSS liefert Ihnen folgenden Output:

Koeffizienten (a)

Modell		Nicht standardisierte Koeffizienten		Standardisierte Koeffizienten	T	Signifikanz
		B	Standardfehler	Beta		
1	(Konstante)	-82,172	4,233		-19,411	,000
	ALTER	5,643	,264	,658	21,373	,000

a Abhängige Variable: ANZZIG

- a) Wie lautet das diesem SPSS-Output zu Grunde liegende ökonometrische Modell? Interpretieren Sie kurz die Ergebnisse.
- b) Sind die Koeffizienten signifikant?
- c) Testen Sie die Gesamterklärungsgüte des Modells anhand des von SPSS errechneten Bestimmtheitsmaßes R^2 in Höhe von 0,658.
- 6.4** Die Senderleitung des FDZ sucht einen geeigneten Termin für die Ausstrahlung der ersten Folge der neuen Staffel von „GUTES REITEN SCHLECHTES REITEN“ und untersucht deshalb, an welchen Wochenendtagen die Konkurrenz Spielfilme zeigt. Wurden in den vergangenen Wochen am Wochenende Blockbuster gleichverteilt ausgestrahlt? Prüfen Sie diese Hypothese für $\alpha = 0,025$, $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,1$.

	Freitag	Samstag	Sonntag
Anzahl der Blockbuster	12	25	23

- 6.5** Die sparsame Senderleitung fragt sich, ob sich die Produktion teurer Trailer zur Ankündigung großer TV-Ereignisse überhaupt lohnt. Hängt der Erfolg von der Ausstrahlung von Trailern ab? Ihnen liegen folgende Daten vor:

	Marktanteil > 20 %	Marktanteil < 20 %
Trailer	19	21
kein Trailer	5	15

Lösungen zu Aufgabenblatt 6: Zweistichprobentests und Anpassungstests

6.1 Zweistichprobentest für die Differenz zweier Anteilswerte

A: Frauen B: Männer

Schritt 1: Parametermenge: $\Theta = [-1,1]$
 Nullhypothese: $H_0: p_A - p_B \geq 0$
 Alternativhypothese: $H_A: p_A - p_B < 0$
 Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Schritt 2: Prüfgröße:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}, \text{ mit } \hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

Z ist annähernd standardnormalverteilt

Schritt 3: $z_\alpha = z_{0,05} = -z_{0,95} = -1,6449$

$\rightarrow KB: (-\infty, -1,6449]$

Schritt 4: $Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$ wobei $\hat{p}_A = 0,27$; $\hat{p}_B = 0,31$; $\hat{p} = 0,288$

$$Z = \frac{0,27 - 0,31}{\sqrt{0,288 \cdot (1 - 0,288)}} \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 80}{100 + 80}} = -0,589$$

Schritt 5: $Z \notin KB$, H_0 beibehalten. Es kann nicht mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % davon ausgegangen werden, dass Fußball bei Männern beliebter ist als bei Frauen.

6.2 Kolmogorov-Smirnov-Verteilungstest

Schritt 1: Parametermenge: Alle Verteilungen auf IR sind möglich
 Nullhypothese: H_0 : Die Produktionskosten sind normalverteilt mit $\mu = 25$ und $\sigma = 1$
 Alternativhypothese: H_A : Die Produktionskosten sind nicht normalverteilt mit $\mu = 25$ und $\sigma = 1$
 Signifikanzniveau: $\alpha = 0,10$

Schritt 2: Prüfgröße:

$$d = \max_z |F^e(z) - F^o(z)|$$

$$d = \max_z \left\{ \begin{array}{l} |F^e(z_i) - F^o(z_{i-1})| \\ |F^e(z_i) - F^o(z_i)| \end{array} \right\}$$

Schritt 3: $n=10$ $\alpha = 0,10$ $d_c=0,369$

$\rightarrow KB: [0,369; \infty)$

Schritt 4:

23,1	-1,9	0,1	0,0287	0,0287	0,0713
23,5	-1,5	0,2	0,0668	0,0332	0,1332
24,1	-0,9	0,3	0,1841	0,0159	0,1159
25,0	0	0,4	0,5000	0,2000	0,1000
25,1	0,1	0,5	0,5398	0,1398	0,0398
25,6	0,6	0,6	0,7257	0,2257	0,1257
25,7	0,7	0,7	0,7580	0,1580	0,0580
26,1	1,1	0,8	0,8643	0,1643	0,0643
26,3	1,3	0,9	0,9032	0,1032	0,0032
26,4	1,4	1,0	0,9192	0,0192	0,0808

Schritt 5: $d=0,2257 < d_c=0,369$ H_0 wird beibehalten. Es kann nicht mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % davon ausgegangen werden, dass die Produktionskosten nicht normalverteilt mit $\mu=25$ und $\sigma=1$ sind. Die Normalverteilung wird angenommen.

6.3 a) $y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{i1} + \varepsilon_i$

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 \cdot x_{i1}$$

$$\hat{y}_i = -82,172 + 5,643 \cdot x_{i1}$$

$$\text{Anzahl Zigaretten} = b_0 + b_1 \text{ Alter}$$

b_1 : Mit jedem weiteren Lebensjahr steigt der Zigarettenkonsum um 5,643 Zigaretten an.

b_0 : In diesem Fall nicht sinnvoll zu interpretieren.

b) Möglichkeit 1: Ablesen vom SPSS-Ausdruck

Signifikanz (p-value) ist für beide Koeffizienten 0,000 und damit kleiner als die gängigen zugelassenen α -Fehler. Beide Koeffizienten sind somit als signifikant anzusehen.

Möglichkeit 2: t-Test

Schritt 1: Parametermenge: Alle Verteilungen auf IR sind möglich

Nullhypothese: $H_0: \beta_k = 0$

Alternativhypothese: $H_A: \beta_k \neq 0$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Schritt 2: Prüfgröße:

$$t = \frac{b_k - (\beta_k = 0)}{s_{b_k}}$$

Schritt 3: $t_{crit} = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-k-1} = t_{0,975, 598}$ Wert nicht tabelliert, da $n > 30$ folgt

Annäherung durch die Normalverteilung: $z_{0,975} = 1,96$.

$\alpha = 0,05$ und $n = 600$

$\rightarrow KB: [1,96; +\infty)$

Schritt 4: $t_{beob} = \frac{b_k}{s_{b_k}} = \frac{5,643}{0,264} = 21,375$

Schritt 5: H_0 Hypothese kann verworfen werden. Der Koeffizient b_0 ist somit signifikant von 0 verschieden.

c) Interpretation R^2 : 65,8 % der Streuung des Zigarettenkonsums werden durch das Modell erklärt.

Test der Gesamterklärungsgüte – F-Test

Schritt 1: Parametermenge: Alle Verteilungen auf IR sind möglich
 Nullhypothese: $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \dots = \beta_k = 0$
 Alternativhypothese: $H_A: \beta_k \neq 0$ ($k = 1, \dots, K$)
 Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Schritt 2: Prüfgröße:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{(n-K-1)}{K}$$

Die Prüfgröße ist F-verteilt mit $v_1 = K$ und $v_2 = n - K - 1$ Freiheitsgraden.

Schritt 3: $F_c = F_{1-\alpha, K, n-K-1} = F_{0,95,1,598} = 3,841$
 $\rightarrow KB: [3,841; +\infty)$

Schritt 4: $F_{beob.} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{(n-K-1)}{K} = \frac{0,658}{1-0,658} \cdot \frac{(600-1-1)}{1} = 1150,54$

Schritt 5: H_0 Hypothese kann verworfen werden. Das Modell liefert somit einen signifikanten Erklärungsansatz.

6.4 Chi-Quadrat-Verteilungstest - einfache Hypothese

Schritt 1: Parametermenge: Menge aller Verteilungen auf {Fr, Sa, So}
 Nullhypothese: H_0 : Die Blockbuster sind gleichverteilt auf {Fr, Sa, So}
 Alternativhypothese: H_A : Die Blockbuster sind nicht gleichverteilt auf {Fr, Sa, So}
 Signifikanzniveau: $\alpha = 0,025, \alpha = 0,05, \alpha = 0,1$

Schritt 2: Prüfgröße:

Theoretische Häufigkeiten: $n \cdot p_i = 20$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

Schritt 3: $KB [\chi^2_c; \infty)$ $v = 3-1=2$

$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$
$\chi^2_c = 7,378$	$\chi^2_c = 5,991$	$\chi^2_c = 4,605$

Schritt 4:
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n_i \cdot p_i} = \frac{(25 - 20)^2}{20} + \frac{(12 - 20)^2}{20} + \frac{(23 - 20)^2}{20} = 4,9$$

Schritt 5: H_0 wird beibehalten. Es kann nicht mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2,5 % (5 %) davon ausgegangen werden, dass die Blockbuster nicht gleichverteilt sind. Die Gleichverteilung wird angenommen.

H_0 wird verworfen. Es kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % davon ausgegangen werden, dass die Blockbuster nicht gleichverteilt sind.

6.5 Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

Schritt 1: Nullhypothese: H_0 : Der Marktanteil ist unabhängig vom Trailer
 Alternativhypothese: H_A : Marktanteil und Ausstrahlung eines Trailers
 sind voneinander abhängig
 Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Schritt 2: Prüfgröße:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{\tilde{n}_{ij}}$$

Diese Prüfgröße ist χ^2 -verteilt mit $\nu = (r-1)(s-1)$ Freiheitsgraden

Schritt 3: $\chi^2_{1-\alpha, \nu} = \chi^2_{0,95,1} = 3,841$
 $\rightarrow KB: [3,841; +\infty)$

Schritt 4:
$$\tilde{n}_{ij} = \frac{n_{i \cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n}$$

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{11} &= \frac{24 \cdot 40}{60} = 16 & \tilde{n}_{12} &= \frac{24 \cdot 20}{60} = 8 \\ \tilde{n}_{21} &= \frac{36 \cdot 40}{60} = 24 & \tilde{n}_{22} &= \frac{36 \cdot 20}{60} = 12 \end{aligned}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{\tilde{n}_{ij}} = \frac{(19 - 16)^2}{16} + \frac{(21 - 24)^2}{24} + \frac{(5 - 8)^2}{8} + \frac{(15 - 12)^2}{12}$$

$$\chi^2 = 0,5625 + 0,375 + 1,125 + 0,75 = 2,8125$$

Schritt 5: $\chi^2 = 2,8125 \leq 3,841 = \chi^2_c \rightarrow H_0$ wird beibehalten.

Es kann nicht mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % davon ausgegangen werden, dass der Marktanteil abhängig von der Ausstrahlung eines Trailers ist. Die Unabhängigkeit wird angenommen.

B Klausur mit Lösung

Prof. Dr. Joachim Merz

Statistik II - Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktive Statistik

Klausur vom SS 2012

24.07.2012

1 Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung (18P.)

Der Sommer hat begonnen und die Grillsaison ist eröffnet. Sie nehmen an einem Grillwettbewerb teil. Der Wettbewerb hat insgesamt 6 Teilnehmer, 4 Teilnehmer verwenden einen Kugelgrill, davon benutzen drei Holzkohle und ein Teilnehmer verwendet Briketts. Die anderen zwei Teilnehmer (Sie eingeschlossen) reisen mit einem Schwenkgrill an, beide Teilnehmer sind überzeugte Brikett-Griller. Der Grillwettbewerb wird von einem Schiedsrichter überwacht. Dieser Schiedsrichter möchte sich ein Bild über die Teilnehmer machen und wählt zufällig eine Person aus, die er genauer „unter die Lupe“ nehmen möchte. *Bitte schreiben Sie zu jedem Aufgabenteil einen Antwortsatz!*

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person mit einem Kugelgrill arbeitet?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person mit Schwenkgrill und Kohle arbeitet?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person mit einem Schwenkgrill oder Kohle arbeitet?
- d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person mit Schwenkgrill und Briketts arbeitet?
- e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schiedsrichter unter den Brikett-Grillern einen Griller mit Kugelgrill auswählt?
- f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schiedsrichter unter den Kugelgrill-Grillern einen Teilnehmer auswählt, der Kohle verwendet?

2 Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen (16P.)

- a) Um sich auf den Wettbewerb vorzubereiten, üben Sie zuhause fleißig und laden Ihre Freunde zum einem gemütlichen Grillabend ein. Vor dem Abend gehen Sie einkaufen und stehen vor der Kühltruhe des Supermarktes Ihres Vertrauens. In dieser Kühltruhe befinden sich 18 Packungen vegetarischer Tofu und 42 Packungen Grillfleisch. Sie greifen 5mal in diese Kühltruhe und entnehmen eine Packung. Leider ist der Deckel der Truhe total vereist und Sie können nicht erkennen, ob es sich um eine Packung Tofu oder Fleisch handelt. Da Ihre Freunde alle Vegetarier

sind, möchten Sie nur Tofu kaufen. *Bitte schreiben Sie zu jedem Aufgabenteil einen Antwortsatz!* (9 Punkte)

- i. Wie ist die Anzahl der Tofu-Packungen verteilt? (2 Punkte)
 - ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen Sie 3 Tofupackungen aus der Truhe?
(3 Punkte)
 - iii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen Sie mindestens 2 Tofupackungen aus der Truhe? (4 Punkte)
- b) Nach einer Woche wollen Sie nun noch einmal Ihre Grillkünste im großen Rahmen testen und laden dazu alle Nachbarn aus Ihrer Straße ein. Sie erwarten 40 Gäste und möchten diese wieder mit einem rein vegetarischen Grillmenü überraschen. Der Supermarkt hat inzwischen eine neue Lieferung Tofu erhalten. Es befinden sich nun 60 Packungen Tofu und 60 Packungen Fleisch in der Truhe. Sie ziehen 40 unbekannte Packungen aus der Truhe. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindesten 25 Tofupackungen aus der Truhe ziehen? (7 Punkte)

3 Punktschätzung (11 P.)

Vor der Teilnahme am Wettbewerb wollen Sie in einen neuen Hightech-Grill investieren. Da dieser Grill allerdings sehr teuer ist, ist Ihnen eine lange Lebensdauer sehr wichtig. Dazu befragen Sie sechs Ihrer Bekannten aus dem örtlichen Grillclub, die bereits seit Jahren Besitzer dieses Modells sind, über die Lebensdauer des Grills. Ihre Bekannten geben an, dass die mittlere Lebensdauer 7 Jahre beträgt.

- a) Wählen Sie eine geeignete Verteilung für die Lebensdauer des Grills (Begründen Sie Ihre Wahl) und leiten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer her. (9 Punkte)
- b) Bestimmen Sie den ML-Schätzwert für die gegebene Stichprobe. (2 Punkte)

4 Intervallschätzung (27 P.)

- a) Sie sind noch immer unsicher, ob Sie sich wirklich diesen teuren Grill kaufen sollten. Um sicher zu gehen, dass der Grill eine gute Investition ist, schauen Sie sich Testberichte an. Sie finden eine Umfrage von 100 Personen, wovon 80 Personen angeben, zufrieden mit dem Grill zu sein. Weiter geht aus dem Bericht hervor, dass der Grill bereits 20000mal verkauft wurde. Bestimmen Sie das 99%-Konfidenzintervall für den Anteil der zufriedenen Grillbesitzer und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. (9 Punkte)
- b) Weiter geht aus der Umfrage hervor, dass die befragten Personen auf einer Zufriedenheitsskala von 1 bis 10 (1 sehr unzufrieden, 10 sehr zufrieden) im Durchschnitt einen Wert von 8 angeben. Die Standardabweichung der Antworten liegt bei 3 Zufriedenheitspunkten.
- c) Bestimmen Sie das 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Zufriedenheit der Grillbesitzer und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. (7 Punkte)

- d) Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgende Aussagen und korrigieren Sie die Aussagen gegebenenfalls: (12 Punkte)
- Wird das Konfidenzniveau $1-\alpha$ erhöht, dann wird das Konfidenzintervall kleiner.
 - Der Mittelwert und der Anteilswert der Stichprobe sind immer normalverteilt.
 - Das Konfidenzintervall für den Anteilswert wird mit zunehmendem Stichprobenumfang größer.
 - Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punktschätzer mit dem Parameter der Grundgesamtheit übereinstimmt, ist höher als bei der Intervallschätzung.

5 Parametertests (18 P.)

Dieser Testbericht hat Sie überzeugt, Sie sind nun sicher, dass Sie mit diesem Grill den Wettbewerb gewinnen können. Der Hersteller des Grills wirbt mit einer durchschnittlichen Grilltemperatur von mindestens 300 °C. Zuhause angekommen wollen Sie diese Behauptung gleich überprüfen. Während des Grillvorganges nehmen Sie fünf Temperaturmessungen und erhalten eine Durchschnittstemperatur von 280°C und eine Varianz von 60°C².

- Überprüfen Sie die Behauptung des Herstellers mit einem geeigneten Test. Lassen Sie eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% zu. (8 Punkte)
- Zeichnen Sie die Testentscheidung in eine Grafik. (4 Punkte)
- Testen Sie die Behauptung, dass die durchschnittliche Grilltemperatur genau 300°C beträgt. (4 Punkte)
- Angenommen der P-Value des Tests betrage 2%, wie würde Ihre Testentscheidung dann ausfallen? (2 Punkte)

6 Tests im klassischen linearen Regressionsmodell (20 P.)

Aufgrund des Ergebnisses des Parametertests, möchten Sie nun herausbekommen, welche Faktoren die durchschnittliche Grilltemperatur beeinflussen. Sie machen dazu verschiedene Testdurchläufe, in denen Sie verschiedenen Brennmaterialien und Hilfsmitteln und messen mehrmals die Temperatur. Insgesamt führen Sie 30 Messungen durch, Sie vermuten dass das Brennmaterial (Kohle_Dummy, 1=Kohle, 0=Brikett), die Anzahl der Kohlen oder Briketts (Anzahl_Brennmaterial) und der Zündstoff (Spiritus_Dummy, 1=Spiritus, 0=Anzünder) auf die durchschnittliche Grilltemperatur (in °C) einwirken. Mithilfe der Regressionsanalyse erhalten Sie folgendes Ergebnis:

Modellzusammenfassung				
Modell	R	R-Quadrat	Korrigiertes R-Quadrat	Standardfehler des Schätzers
1	,635 ^a	,403	,334	54,521

ANOVA^b

Modell		Quadratsumme	df	Mittel der Quadrate	F	Sig.
1	Regression	52109,551	3	17369,850	5,844	,003 ^a
	Nicht standardisierte Residuen	77285,149	26	2972,506		
	Gesamt	129394,700	29			

Koeffizienten^a

Modell		Nicht standardisierte Koeffizienten		T	Sig.
		Koeffizient B	Standardfehler		
1	(Konstante)	159,839	32,607	4,902	,000
	Kohle_Dummy	53,945	20,007	2,696	,012
	Anzahl_Brennmaterial	3,923	1,365	2,875	
	Spiritus_Dummy	-24,871	20,166	-1,233	,228

- Bestimmen Sie das Bestimmtheitsmaß R^2 mithilfe der Tabelle und interpretieren Sie diesen Wert. (3 Punkte)
- Interpretieren Sie anhand der Tabelle den Test zur Gesamterklärungsgüte ($\alpha=0,05$), gehen Sie dabei auch auf die Hypothese und die Testentscheidung ein. (4 Punkte)
- Interpretieren Sie alle Koeffizienten des Regressionsmodells (außer der Konstanten). (6 Punkte)
- Interpretieren Sie anhand der Tabelle die Signifikanz des T-Testes der Variable Anzahl_Brennmaterial, gehen Sie dabei auch auf die Hypothese und das Signifikanzniveau ein ($\alpha=0,05$). (4 Punkte)
- Zeichnen Sie das Testergebnis (inklusive P-Value, Testwert und Prüfwert) für die Variable Kohle_Dummy in eine geeignete Grafik. (4 Punkte)

7 Verteilungstests (9 P.)

Leider haben Sie trotz guter Vorbereitung und High-Tech-Grill nur den 20. Platz von insgesamt 40 Plätzen beim Grillwettbewerb erreicht. Doch Sie vermuten, dass die Teilnehmer mit Kugelgrill von der Jury bevorzugt werden und zählen nach, wie viele Teilnehmer in den letzten drei Jahren unter die ersten zehn Plätze gekommen sind.

	Platz 1 bis Platz 10	Platz 11 und schlechter
Kugelgrill	200	100
Schwenkgrill	100	100

Testen Sie mithilfe eines geeigneten Test, ob Ihre Vermutung stimmt ($\alpha=0,01$).

2 Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen (16P.)

i)

$$n = 5$$

$X = \text{Anzahl der Tofupackungen}$

$$N = 60 \qquad M = 18$$

$$p = \frac{18}{60} = 0,3$$

Hypergeometrisch

$X = \text{Anzahl der Tofupackungen}$

$X = \text{Hyp.}(N = 60, n = 5, M = 18)$

ii)

$$P(x = 3) = f_{\text{Hyp.}}(3) = \frac{\binom{18}{3} \binom{42}{2}}{\binom{60}{5}} = 0,12864$$

iii)

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - F_{\text{Hyp.}}(1) = 1 - 0,5282 = 0,4718$$

$$F_{\text{Hyp.}}(1) = \frac{\binom{18}{0} \binom{42}{5}}{\binom{60}{5}} + \frac{\binom{18}{1} \binom{42}{4}}{\binom{60}{5}} = 0,1557 + 0,3688 = 0,52459$$

b. $N = 120$

$$T = 60$$

$$p = 0,5$$

$$n = 40$$

$$n \cdot p \cdot (1 - p) = 40 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 10 \geq 9$$

$$P(x \geq 25) = 1 - P(x \leq 25) = 1 - F_N(25) = 1 - \Phi(z)$$

$$z = \frac{x - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}} = \frac{25 - 40 \cdot 0,5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = 1,58$$

$$P(x \geq 25) = 1 - \Phi(z) = 1 - \Phi(1,58) = 1 - 0,9429 = 0,0571$$

3 Punktschätzung (11 P.)

a. $X = \text{Exp}(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$L(x | \lambda) = \prod_i f(x) = \prod_i \lambda e^{-\lambda x_i}$$

$$\ln L(x | \lambda) = \sum_i \ln(\lambda e^{-\lambda x_i}) = \sum_i (\ln \lambda - \lambda x_i) = n \ln \lambda - \lambda \sum_i x_i$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_i x_i = 0$$

$$\frac{n}{\lambda} = \sum_i x_i \rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum_i x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

b. $1/7 = 0,1428$

4 Intervallschätzung (27 P.)

a. $N = 20000$ $\frac{n}{N} = \frac{100}{20000} = 0,005 \rightarrow \text{mit Zurücklegen}$

$$n = 100$$

$$p = 80/100 = 0,8$$

$$n \cdot p \cdot (1 - p) = 100 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 16 \geq 9$$

$$KI : (p - z \cdot \sigma_p \leq p \leq p + z \cdot \sigma_p) = 1 - \alpha$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{100}} = 0,04$$

$$z = 2,5758$$

$$KI : (0,8 - 2,5758 \cdot 0,04 \leq p \leq 0,8 + 2,5758 \cdot 0,04) = 0,99$$

$$KI : (0,6969 \leq p \leq 0,9030) = 0,99$$

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% liegt der Anteil zufriedener Personen zwischen 69,69% und 90,30%.

b. $N = 20000$ $\frac{n}{N} = \frac{100}{20000} = 0,005 \rightarrow \text{mit Zurücklegen}$

$$n = 100$$

$$\bar{X} = 8$$

$$S_x = 3$$

$$\sigma_x = \frac{S}{\sqrt{n-1}} = \frac{3}{\sqrt{99}} = 0,3015$$

$$KI : (\bar{x} - t \cdot \sigma_x \leq \mu \leq \bar{x} + t \cdot \sigma_x) = 1 - \alpha$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$z = 1,96 \text{ oder } t = 1,984$$

$$KI : (8 - 1,96 \cdot 0,3015 \leq \mu \leq 8 + 1,96 \cdot 0,3015) = 0,95$$

$$KI : (7,409 \leq \mu \leq 8,5909) = 0,99$$

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% liegt die durchschnittliche Zufriedenheit zwischen 7,409 und 8,5909.

- c.
- i. Falsch, $1-\alpha$ größer $\rightarrow \alpha$ kleiner $\rightarrow z$ größer $\rightarrow$ Konfidenzintervall breiter.
 - ii. Falsch, Mittelwert schon (Zentraler Grenzwertsatz), für Anteilswert binominal, kann approx. Werden $\rightarrow$ Bedingung prüfen.
 - iii. Falsch, n verringert Standardabweichung von p , daher wird das Konfidenzintervall kleiner.
 - iv. Falsch, Wahrscheinlichkeit, dass Punktschätzer den wahren Wert trifft geht gegen 0.

5 Parametertests (18 P.)

a). $H_0 : \mu \geq 300$

$H_A : \mu < 300$

$\bar{x} = 280$

$S_x = \sqrt{60}$

Varianz der GG unbekannt

Prüfgröße

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{280 - 300}{1,9364} = -5,1646$$

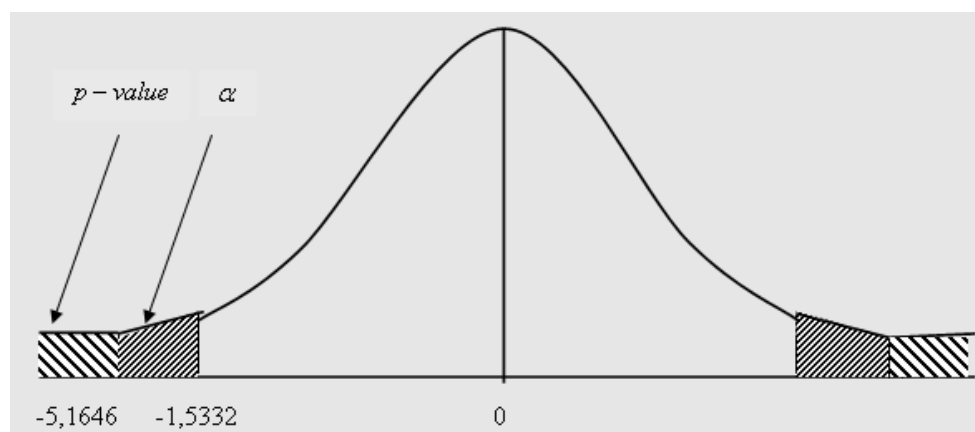
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{4}} = 3,872$$

Kritischer Wert

$t_{4,0.90}^c = -1,5332$

Die Nullhypothese kann somit verworfen werden.

b)



c) $H_0 : \mu = 300$

$$H_A : \mu \neq 300$$

$$\bar{x} = 280$$

$$S_x = 60$$

Varianz der GG unbekannt

Prüfgröße

$$T = -5,1646$$

Kritischer Wert

$$t_{4,0.95}^c = \pm 2,1318$$

Die Nullhypothese kann somit verworfen werden.

d) Die Nullhypothese kann verworfen werden.

6 Tests im klassischen linearen Regressionsmodell (20 P.)

a) $R^2 = 0,403$

Das Bestimmtheitsmaß gibt den Anteil der durch das Modell erklärten Varianz im Verhältnis zur Gesamtvarianz an. In diesem Fall werden also 40,3 % der Streuung durch das Modell erklärt. Dies stellt einen mittelmäßigen Wert dar.

b) Nullhypothese: $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = \dots = \beta_K = 0$

Alternativhypothese: $H_A : \beta_k \neq 0 \ (k=1, \dots, K)$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$ / p-value: ,003^a

Da der p-value (Wahrscheinlichkeit Fehler 1. Art zu begehen) kleiner als die gegebene Irrtumswahrscheinlichkeit ist, kann die Nullhypothese abgelehnt werden.

Die Nullhypothese kann abgelehnt werden. Somit leistet zumindest eine der gewählten Variablen einen signifikanten Beitrag zur Erklärung der Temperatur.

c) Wird Kohle verwendet erhöht sich die Grilltemperatur um 53,945 °C.

Steigt die Anzahl des Brennmaterials um eine Einheit erhöht sich die Grilltemperatur um 3,923 °C.

Wird Spiritus verwendet sinkt sich die Grilltemperatur um 24,871 °C.

d) Nullhypothese: $H_0: \beta_k = 0$

Alternativhypothese: $H_A: \beta_k \neq 0$

Kritischer Bereich:

$$]-\infty; -t_c] \cup [t_c; +\infty[$$

$$(t_c = t_{1-\alpha/2, n-K-1})$$

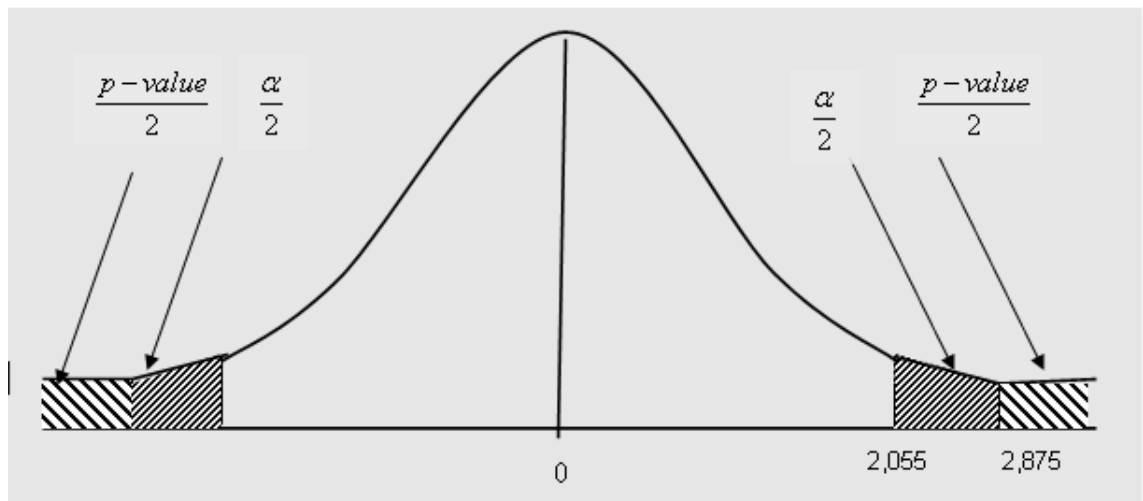
$$T_{\text{krit}} = T_{1-\alpha/2, n-K-1} = T_{0.975, 26} = \pm 2,055$$

Prüfgröße: $T_{\text{prüf}} = 2,875$

Da die Prüfgröße innerhalb des kritischen Bereichs liegt, wird die Nullhypothese abgelehnt.

Es kann somit davon ausgegangen werden, dass die Anzahl des Brennmaterials einen signifikanten Beitrag zur Erklärung der Temperatur leistet.

e)



7 Verteilungstests (9 P.)

H_0 : Bewertung und Art des Grills sind unabhängig

H_A : Bewertung und Art des Grills sind nicht unabhängig

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{\tilde{n}_{ij}} = \frac{(200-180)^2}{180} + \frac{(100-120)^2}{120} + \frac{(100-120)^2}{120} + \frac{(100-80)^2}{80} \\ &= \frac{(20)^2}{180} + \frac{(20)^2}{120} + \frac{(20)^2}{120} + \frac{(20)^2}{80} = 2,22 + 3,333 + 3,333 + 5 = 13,888\end{aligned}$$

Kritischer Wert

$$\chi_{0,99}^c(1) = \pm 6,635$$

Testentscheidung: H_0 verwerfen.

Die Bewertung der Schiedrichter hängt von der Art des Grills ab. Die Vermutung wurde bestätigt.

Anhang I: Formelsammlung



Zusammenfassung der Formeln

I Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Laplacesche Wahrscheinlichkeitsdefinition

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } A}{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } G}$$

G = Menge aller Elementarereignisse (Ereignisraum)

A = Ereignis (Teilmenge von G)

Kolmogorov-Axiome

1. Axiom: $P(A) \geq 0$, $P(A) \in \mathbb{R}_0^+$
2. Axiom: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$,
falls $A_1, A_2, \dots$ einander paarweise ausschließende Ereignisse aus demselben Ereignisraum sind.
3. Axiom: $P(G) = 1$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

$$P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B)$$

Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Additionssatz

- für disjunkte Ereignisse:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

- für nicht-disjunkte Ereignisse:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Multiplikationssatz

- für stochastisch unabhängige Ereignisse:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

- für stochastisch abhängige Ereignisse:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= P(B) \cdot P(A|B) \end{aligned}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Die Ereignisse A_i sind disjunkt und bilden eine endliche Zerlegung der Grundgesamtheit.

Für ein beliebiges Ereignis ε innerhalb G gilt dann:

$$P(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n P(\varepsilon \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(\varepsilon|A_i)$$

Satz von Bayes

$$P(A_j | \varepsilon) = \frac{P(A_j) \cdot P(\varepsilon | A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(\varepsilon | A_i)}$$

II Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x_i) = f(x_i)$$

Eigenschaften:

1. $0 \leq f(x_i) \leq 1$
2. $f(x_i) \geq 0$
3. $\sum_i f(x_i) = 1$

Verteilungsfunktion

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Eigenschaften:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

Für $x_1 \leq x_2$ gilt $F(x_1) \leq F(x_2)$

Erwartungswert

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot f(x_i) = \mu$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \sum_i x_i^2 \cdot f(x_i) - \mu^2 = \sigma_x^2$$

Stetige Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

Eigenschaften:

1. $f(x) \geq 0$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Eigenschaften:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. Für $x_1 \leq x_2$ gilt $F(x_1) \leq F(x_2)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Erwartungswert

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \mu$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \sigma_x^2$$

III Diskrete Verteilungen

Gleichverteilung

Parameter n = Stichprobenumfang

Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x_i) = f(x_i) = \frac{1}{n} \quad i=1, \dots, n$$

Verteilungsfunktion

$$F(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1 \\ \frac{i}{n} & \text{für } x_i \leq x < x_{i+1} \quad (i=1, \dots, n-1) \\ 1 & \text{für } x_n \leq x \end{cases}$$

Binomialverteilung

Parameter n = Stichprobenumfang

p = Erfolgswahrscheinlichkeit des Elementarereignisses

Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = f_B(x|n, p) = f_B(n-x|n, 1-p)$$

$$f_B(x|n, p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Verteilungsfunktion

$$P(X \leq x) = F_B(x) = F_B(x|n, p) = 1 - F_B(n-x-1|n, 1-p)$$

$$F_B(x|n, p) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Erwartungswert

$$E(X) = n \cdot p$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Hypergeometrische Verteilung

Parameter n = Stichprobenumfang

N = Umfang der Grundgesamtheit

M = Zahl der Elemente in der Grundgesamtheit mit einer bestimmten Eigenschaft

Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = f_H(x | N, n, M)$$

$$f_H(x | N, n, M) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Verteilungsfunktion

$$F_H(x | N, n, M) = \sum_{k=0}^x \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Erwartungswert

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Poissonverteilung

Parameter μ : Erwartungswert = Varianz

Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = f_P(x | \mu)$$

$$f_P(x | \mu) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!}$$

Verteilungsfunktion

$$P(X \leq x) = F_P(x | \mu) = \sum_{k=0}^x \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!}$$

Rekursionsformel

$$f((x+1)|\mu) = \frac{\mu}{x+1} \cdot f(x|\mu)$$

Erwartungswert

$$E(X) = \mu$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \mu$$

Geometrische Verteilung**Parameter** p **Wahrscheinlichkeitsfunktion**

$$f_g(x|p) = p(1-p)^{x-1} \quad x=1, 2, \dots$$

Verteilungsfunktion

$$F_g(x|p) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 - (1-p)^m & \text{für } m \leq x < m+1; \quad m=1, 2, \dots \end{cases}$$

Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Multinomialverteilung

Parameter n = Stichprobenumfang
 p_i = Erfolgswahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse

Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = f_M(x_1, x_2, \dots, x_k | n, p_1, \dots, p_k)$$

$$f_M(x_1, x_2, \dots, x_k | n, p_1, \dots, p_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k}$$

$$\text{mit } \sum_{i=1}^k x_i = n \text{ und } \sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

Erwartungswert

$$E(X_i) = n \cdot p_i$$

Varianz

$$\text{Var}(X_i) = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$$

Allgemeine hypergeometrische Verteilung

Parameter n = Stichprobenumfang
 N_i = Zahl der Elemente in der Grundgesamtheit mit einer bestimmten, für jedes i verschiedenen Eigenschaft

Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = f_{AH}(x_1, x_2, \dots, x_k | n, N_1, N_2, \dots, N_k)$$

$$f_{AH}(x_1, x_2, \dots, x_k | n, N_1, \dots, N_k) = \frac{\binom{N_1}{x_1} \cdot \binom{N_2}{x_2} \cdot \dots \cdot \binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\text{mit } \sum_{i=1}^k x_i = n \text{ und } \sum_{i=1}^k N_i = N.$$

Erwartungswert

$$E(X_i) = n \cdot \frac{N_i}{N}$$

Varianz

$$\text{Var}(X_i) = n \cdot \frac{N_i}{N} \cdot \left(1 - \frac{N_i}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

IV Stetige Verteilungen**Gleichverteilung**

Parameter $a, b \rightarrow$ Grenzen des Intervalls

Dichtefunktion

$$f_g(x|a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion

$$F_g(x|a,b) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$

Erwartungswert

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exponentialverteilung

Dichtefunktion

$$f_E(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{für } x \geq 0 \text{ mit } \lambda > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion

$$F_E(x|\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Gammaverteilung

Parameter r, λ

Dichtefunktion

$$f_G = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{r-1}, \quad x \geq 0$$

wobei $\Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1} e^{-t} dt$, $\Gamma(r) = (r-1)!$, falls r ganzzahlig

Erwartungswert

$$E(X) = \frac{r}{\lambda}$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

Normalverteilung

Parameter μ = Erwartungswert

σ^2 = Varianz = Streuung um den Erwartungswert

Dichtefunktion

$$f_N(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

für $-\infty < x < +\infty$

$-\infty < \mu < +\infty$

$0 < \sigma^2 < +\infty$

Verteilungsfunktion

$$F_N(x|\mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} dt$$

Erwartungswert

$$E(X) = \mu$$

Varianz

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

Standardnormalverteilung

$$N(\mu, \sigma^2) = N(0, 1)$$

= Normalverteilung mit den Parametern $\mu=0$ und $\sigma^2 = 1$

Standardisierte Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Dichtefunktion

$$\phi(z) = f_N(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Verteilungsfunktion

$$\Phi(z) = F_N(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Chi-Quadratverteilung**Parameter** ν **Dichtefunktion**

$$f_{\chi^2}(z|\nu) = C(\nu) \cdot z^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \quad z > 0$$

$$\text{mit } C(\nu) = \left[2^{\frac{\nu}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right]^{-1}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$$

Erwartungswert

$$E(\chi^2) = \nu$$

Varianz

$$\text{Var}(\chi^2) = 2\nu$$

Studentverteilung (t-Verteilung)

Parameter ν

Dichtefunktion

$$f_t(z | \nu) = C(\nu) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}} \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

$$\text{mit } C(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

Erwartungswert

$$E(T) = 0$$

Varianz

$$\text{Var}(T) = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad \text{für } \nu > 2$$

F-Verteilung

Parameter ν_1, ν_2

Dichtefunktion

$$f_F(z | \nu_1, \nu_2) = C(\nu_1, \nu_2) \cdot \frac{z^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(\nu_2 + \nu_1 z\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, \quad z > 0$$

$$\text{mit } C(\nu_1, \nu_2) = \frac{\nu_1^{(\nu_1/2)} \cdot \nu_2^{(\nu_2/2)}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}$$

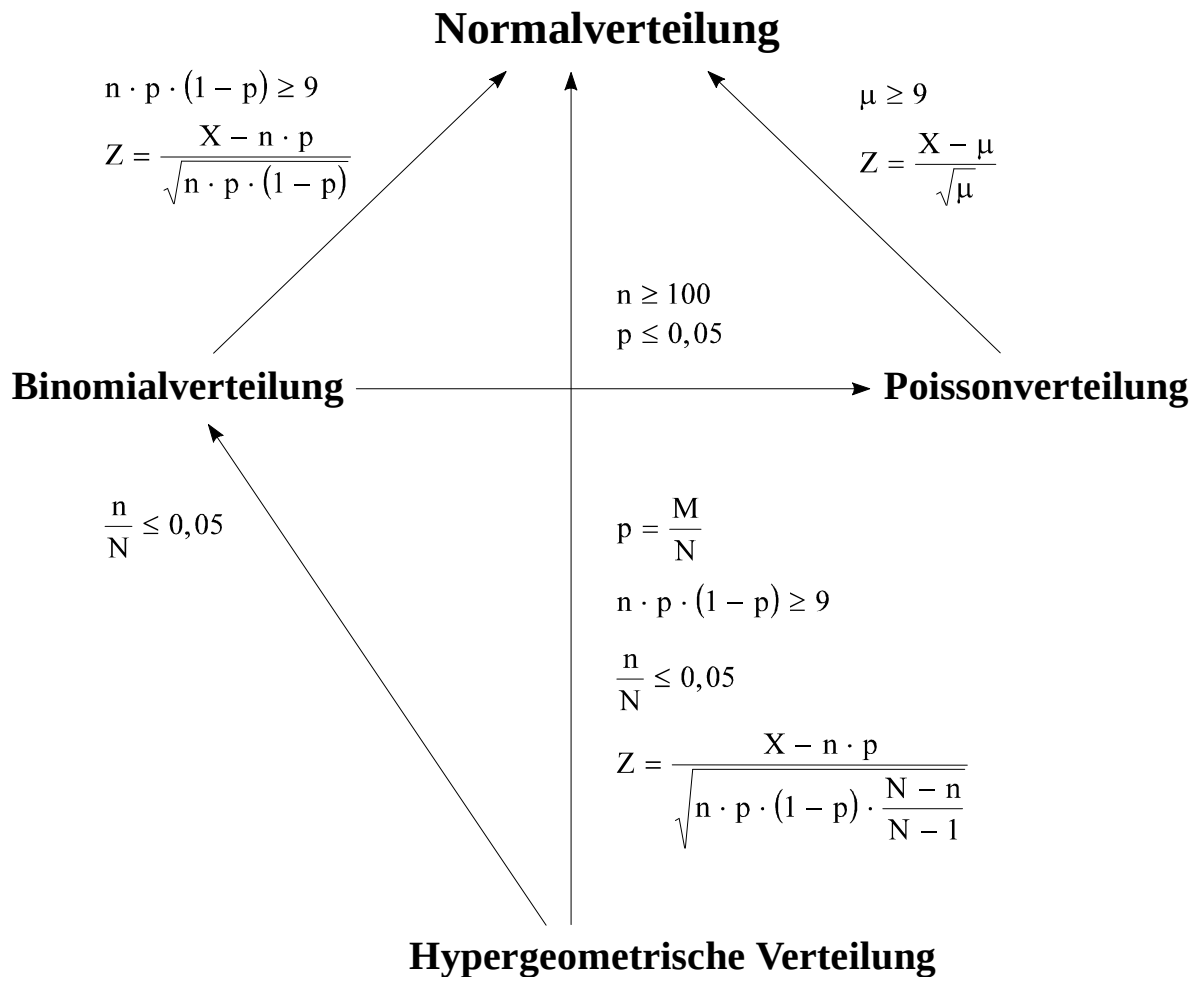
Erwartungswert

$$E(F) = \frac{v_2}{v_2 - 2} \quad \text{für } v_2 \geq 2$$

Varianz

$$\text{Var}(F) = \frac{2v_2^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)} \quad \text{für } v_2 > 4$$

Übergänge zwischen den Verteilungen



V Induktive Statistik Stichprobenfunktionen und Testverteilungen

Arithmetisches Mittel der Stichprobe

Stichprobenfunktion

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i)$$

Erwartungswert

$$E(\bar{X}) = \mu$$

Varianz

$$\text{Var}(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Testverteilung

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \quad \text{ist standardnormalverteilt, falls } X_i \text{ normalverteilt ist;}$$

ist approximativ standardnormalverteilt, falls die X_i unabhängig identisch verteilt sind und n groß ist (Faustregel: $n \geq 100$).

Varianz der Stichprobe

Stichprobenfunktion

$$S^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Testverteilung

$$\chi^2 = \frac{n \cdot S^2}{\sigma^2}, \text{ wobei } S^2 = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$$

χ^2 ist χ^2 -verteilt mit $v = n - 1$ Freiheitsgraden.

Standardisierte Zufallsvariable bei unbekannter Varianz der Grundgesamtheit

Stichprobenfunktion

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}}{\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}}}$$

Testverteilung

T ist t-verteilt mit $v = n - 1$ Freiheitsgraden

Quotienten zweier Varianzen

Stichprobenfunktion

$$\text{für } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ gilt } F = \frac{n_1 \cdot S_1^2 \cdot (n_2 - 1)}{n_2 \cdot S_2^2 \cdot (n_1 - 1)} = \frac{\chi_1^2 \cdot (n_2 - 1)}{\chi_2^2 \cdot (n_1 - 1)}.$$

Testverteilung

F ist F-verteilt mit $v_1 = n_1 - 1$ und $v_2 = n_2 - 1$ Freiheitsgraden.

VI Punktschätzung

Eigenschaften von Schätzfunktionen

- **Erwartungstreue:** $E(\hat{\theta}) = \theta$

Verzerrung (bias): $E(\hat{\theta}) \neq \theta$

Asymptotische Erwartungstreue, wenn gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}^{(n)}) = \theta$

- **Konsistenz:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{prob}(|\hat{\theta}^n - \theta| \geq \delta) = 0$

- Eine Schätzfunktion $\hat{\theta}$ ist konsistent, falls sie
 1. asymptotisch erwartungstreu ist und
 2. ihre Varianz $\text{Var}(\hat{\theta})$ für $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.

- **Effizienz:**

- relative Effizienz:

$Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$, wobei $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ erwartungstreue Schätzfunktionen für θ sind.

- absolute Effizienz:

Die $Var(\hat{\theta})$ ist minimal im Vergleich zu jeder anderen erwartungstreuen Schätzfunktion.

Schätzmethoden

Methode der Momente

Unbekannte Parameter der Grundgesamtheit werden den entsprechenden Parametern der Stichprobe gleichgesetzt.

Methode der kleinsten Quadrate

Unbekannte Parameter der Grundgesamtheit β_k ($k=0, \dots, K$) aus

$$y_i = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_K x_{Ki}}_{\substack{\mu_i \\ \text{systematischer Einfluß}}} + \underbrace{\varepsilon_i}_{\substack{\varepsilon_i \\ \text{zufälliger Einfluß}}}$$

werden über $b^{OLS} = (X'X)^{-1} X'y$ geschätzt.

Maximum-Likelihood-Methode

Likelihoodfunktion:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1 | \theta) \cdot f(x_2 | \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n | \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \quad \text{bzw.} \end{aligned}$$

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i | \theta)$$

mit $f(x_i | \theta)$ = Dichtefunktion der Zufallsvariable X_i

Den Schätzwert $\hat{\theta}$ erhält man über die Maximierung von $L(\theta)$ bzw. $\ln L(\theta)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \text{ bzw. } \frac{\partial \ln L}{\partial \ln \theta} = 0.$$

VII Intervallschätzung

Konfidenzintervall für μ

- bei bekannter Varianz σ^2 der Grundgesamtheit (GG normalverteilt)

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{X}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad (\text{Korrektur bei einer Stichprobe ohne Zurücklegen und } \frac{n}{N} \geq 0,05)$$

- bei unbekannter Varianz σ^2 der Grundgesamtheit (GG normalverteilt)

$$P\left(\bar{X} - t \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + t \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}}\right) = 1 - \alpha, \quad \text{wobei } t = t_{1-\alpha/2, n-1}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{N-n}{N}} \quad (\text{Korrektur bei einer Stichprobe ohne Zurücklegen und } \frac{n}{N} \geq 0,05)$$

Wenn die Anzahl der Freiheitsgrade $v > 30$ ist, kann die Studentverteilung durch die Normalverteilung approximiert werden.

Konfidenzintervall für die Varianz σ^2 (GG normalverteilt)

$$P\left(\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

Konfidenzintervall für den Anteilswert p

$$P\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{p}} \leq p \leq \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{p}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{mit } \hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \quad \text{Modell mit Zurücklegen}$$

mit $\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n} \cdot \frac{N - n}{N - 1}}$ Modell ohne Zurücklegen und $\frac{n}{N} \geq 0,05$.

Bestimmung des notwendigen Stichprobenumfangs

- bei Schätzung für μ

$$\Delta \mu = z \cdot \sigma_{\bar{X}} = \text{absoluter Fehler}$$

$$n = \frac{z^2 \cdot \sigma^2}{(\Delta \mu)^2}$$

- bei Schätzung für Anteilswert p

$$\Delta p = z \cdot \sigma_{\hat{p}} = z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} = \text{absoluter Fehler} \quad \text{Modell mit Zurücklegen}$$

$$n = \frac{z^2 \cdot p \cdot (1 - p)}{(\Delta p)^2} \quad \text{Modell mit Zurücklegen}$$

$$\Delta p = z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n} \cdot \frac{N - n}{N - 1}} = \text{absoluter Fehler} \quad \text{Modell ohne Zurücklegen}$$

$$\text{und } \frac{n}{N} \geq 0,05$$

$$n = \frac{z^2 \cdot N \cdot p \cdot (1 - p)}{(\Delta p)^2 \cdot (N - 1) + z^2 \cdot p \cdot (1 - p)} \quad \text{Modell ohne Zurücklegen}$$

$$\text{und } \frac{n}{N} \geq 0,05$$

$\hat{p}$ ist Schätzwert für p .

Wenn keine Informationen über $\hat{p}$ vorliegen: $\hat{p} = 0,5$.

Konfidenzintervall für die Differenz zweier arithmetischer Mittel

Voraussetzung: - Unabhängigkeit der Stichproben
- genügend große Stichprobenumfänge (Faustregel: $n_1 > 30, n_2 > 30$)

- σ_1^2 und σ_2^2 bekannt

$$P\left[\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - z \cdot \sigma_D \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + z \cdot \sigma_D\right] = 1 - \alpha$$

wobei $z = z_{1-\alpha/2}$

$$\sigma_D^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

- σ_1^2 und σ_2^2 unbekannt, aber $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$P\left[\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t \cdot \hat{\sigma}_D \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t \cdot \hat{\sigma}_D\right] = 1 - \alpha$$

wobei $t = t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot S^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2} \cdot (n_1 \cdot S_1^2 + n_2 \cdot S_2^2)$$

$$\hat{\sigma}_D^2 = \frac{n_1 \cdot S_1^2 + n_2 \cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2} \right)$$

Konfidenzintervall für die Differenz zweier Anteilswerte

Bedingung:

$$n_1 \cdot \hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1) \geq 9, n_2 \cdot \hat{p}_2 \cdot (1 - \hat{p}_2) \geq 9$$

$$P\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z \cdot \hat{\sigma}_D \leq p_1 - p_2 \leq (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z \cdot \hat{\sigma}_D\right] = 1 - \alpha$$

wobei

$$\hat{\sigma}_D^2 = \frac{\hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \cdot (1 - \hat{p}_2)}{n_2}$$

$$z = z_{1-\alpha/2}$$

VIII Parametertests

Prüfgrößen und Testverteilungen

Grundlagen

1. Schritt: Parametermenge, Nullhypothese, Alternativhypothese, Signifikanzniveau
2. Schritt: Prüfgröße, Testverteilung
3. Schritt: Kritischer Bereich
4. Schritt: Wert der Prüfgröße
5. Schritt: Entscheidung, Interpretation

Einstichprobentests für den Anteilswert

Zweiseitige Fragestellung

Nullhypothese: $H_0: p = p_0$

Alternativhypothese: $H_A: p \neq p_0$

Prüfgröße:
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\text{Var}(\hat{p} | p_0)}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}},$$

wobei $\hat{p} = \frac{X}{n}$ und $X \sim B(n, p)$

Testverteilung: $Z \sim N(0, 1)$ für $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$

Kritischer Bereich: $(-\infty; z_u] \cup [z_o; +\infty)$
 $z_u = z_{\alpha/2}$, $z_o = z_{1-\alpha/2}$

Einseitige Fragestellung

Nullhypothese: $H_0: p \leq p_0$

Alternativhypothese: $H_A: p > p_0$

Prüfgröße:
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\text{Var}(\hat{p} | p_0)}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}},$$

wobei $\hat{p} = \frac{X}{n}$ und $X \sim B(n, p)$

Testverteilung: $Z \sim N(0, 1)$ für $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$

Kritischer Bereich: $[z_c; +\infty)$
 $z_c = z_{1-\alpha}$

Einstichprobentests für das arithmetische Mittel bei normalverteilter Grundgesamtheit

Einstichprobentest für μ bei bekannter Varianz σ^2 der GG

Zweiseitige Fragestellung

Nullhypothese: $H_0: \mu = \mu_0$

Alternativhypothese: $H_A: \mu \neq \mu_0$

Prüfgröße:
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}},$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad (\text{Korrektur bei einer Stichprobe ohne Zurücklegen und } \frac{n}{N} \geq 0,05)$$

Testverteilung: $Z \sim N(0, 1)$

Kritischer Bereich: $(-\infty; z_u] \cup [z_o; +\infty)$
 $z_u = z_{\alpha/2}$, $z_o = z_{1-\alpha/2}$

Einstichprobentest für μ bei unbekannter Varianz σ^2 der GG

Zweiseitige Fragestellung

Nullhypothese: $H_0: \mu = \mu_0$

Alternativhypothese: $H_A: \mu \neq \mu_0$

Prüfgröße: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\hat{V}ar(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}$,

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{N-n}{N}} \quad (\text{Korrektur bei einer Stichprobe ohne Zurücklegen und } \frac{n}{N} \geq 0,05)$$

Testverteilung: $T \sim t$ - verteilt mit $n - 1$ Freiheitsgraden

Kritischer Bereich: $(-\infty; t_u] \cup [t_o; +\infty)$
 $t_u = t_{\alpha/2; n-1}$, $t_o = t_{1-\alpha/2; n-1}$

Einstichprobentests für die Varianz bei normalverteilter Grundgesamtheit

Zweiseitige Fragestellung

Nullhypothese: $H_0: \sigma = \sigma_0$

Alternativhypothese: $H_A: \sigma \neq \sigma_0$

Prüfgröße: $\chi_0^2 = \frac{n \cdot S^2}{\sigma_0^2}$

Testverteilung: $\chi_0^2 \sim \chi^2$ - verteilt mit $n - 1$ Freiheitsgraden

Kritischer Bereich: $\left[0; \chi_u^2\right] \cup \left[\chi_o^2; +\infty\right)$
 $\chi_u^2 = \chi_{\alpha/2}^2 (n-1)$, $\chi_o^2 = \chi_{1-\alpha/2}^2 (n-1)$

Einseitige Fragestellung

Nullhypothese: $H_0: \sigma \leq \sigma_0$

Alternativhypothese: $H_A: \sigma > \sigma_0$

Prüfgröße: $\chi_0^2 = \frac{n \cdot S^2}{\sigma_0^2}$

Testverteilung: $\chi_0^2 \sim \chi^2$ -verteilt mit n-1 Freiheitsgraden

Kritischer Bereich: $\left[\chi_c^2; +\infty\right)$
 $\chi_c^2 = \chi_{1-\alpha}^2 (n-1)$

Zweistichprobentests für die Differenz zweier arithmetischer Mittel

Voraussetzungen:

- Beide Stichproben sind unabhängig voneinander.
- Beide Stichproben stammen aus normalverteilten Grundgesamtheiten.

- Die Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 sind bekannt

Fall 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Nullhypothese: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

Alternativhypothese: $H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Prüfgröße: $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$

Testverteilung: $Z \sim N(0, 1)$

Kritischer Bereich: $(-\infty; z_u] \cup [z_o; +\infty)$
 $z_u = z_{\alpha/2}$, $z_o = z_{1-\alpha/2}$

Fall 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Nullhypothese: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

Alternativhypothese: $H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Prüfgröße: $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{n_2 \cdot \sigma_1^2 + n_1 \cdot \sigma_2^2}} \cdot \sqrt{n_1 \cdot n_2}$

Testverteilung: $Z \sim N(0, 1)$

Kritischer Bereich: $(-\infty; z_u] \cup [z_o; +\infty)$
 $z_u = z_{\alpha/2}$, $z_o = z_{1-\alpha/2}$

• Die Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 sind unbekannt

Fall 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Nullhypothese: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

Alternativhypothese: $H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Prüfgröße:
$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{(n_1 + n_2) \cdot \frac{S}{\sqrt{n_1 + n_2 - 2}}} \cdot \sqrt{n_1 \cdot n_2}$$

wobei $S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2} \cdot (n_1 \cdot S_1^2 + n_2 \cdot S_2^2)$ bzw.

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{n_2 \cdot \hat{\sigma}_1^2 + n_1 \cdot \hat{\sigma}_2^2}} \cdot \sqrt{n_1 \cdot n_2} \quad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} S_1^2 \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} S_2^2$$

Testverteilung: $T \sim t$ -verteilt mit $v = n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden

Kritischer Bereich: $(-\infty; t_u] \cup [t_o; +\infty)$
 $t_u = t_{\alpha/2, v}$, $t_o = t_{1-\alpha/2, v}$

Fall 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Nullhypothese: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

Alternativhypothese: $H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Prüfgröße:
$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{n_2 \cdot \hat{\sigma}_1^2 + n_1 \cdot \hat{\sigma}_2^2}} \cdot \sqrt{n_1 \cdot n_2}$$

wobei $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot S_1^2$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot S_2^2$$

Testverteilung: T ist annähernd t -verteilt mit v Freiheitsgraden:

$$v^* = \frac{1}{\frac{w^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-w)^2}{n_2 - 1}} \quad \text{mit}$$

$$0 < w = \frac{\hat{\sigma}_1^2 \cdot n_2}{\hat{\sigma}_1^2 \cdot n_2 + \hat{\sigma}_2^2 \cdot n_1} < 1$$

$$v = \lfloor v^* \rfloor$$

Kritischer Bereich: $(-\infty; t_u] \cup [t_o; +\infty)$ $t_u = t_{\alpha/2, v}$, $t_o = t_{1-\alpha/2, v}$

Zweistichprobentests für den Quotienten zweier Varianzen

Voraussetzungen:

- Beide Stichproben sind unabhängig voneinander.
- Beide Stichproben stammen aus normalverteilten Grundgesamtheiten.

Zweiseitige Fragestellung

Nullhypothese:	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
Alternativhypothese:	$H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
Prüfgröße:	$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{n_1 \cdot S_1^2 / (n_1 - 1)}{n_2 \cdot S_2^2 / (n_2 - 1)}$
Testverteilung: Freiheitsgraden	F ist F-verteilt mit $v_1 = n_1 - 1$ und $v_2 = n_2 - 1$
Kritischer Bereich:	$[0; F_u] \cup [F_o; +\infty]$ $F_o = F_{1-\alpha/2, v_1, v_2}$, $F_u = F_{\alpha/2, v_1, v_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha/2, v_2, v_1}}$

Einseitige Fragestellung

Nullhypothese:	$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$
Alternativhypothese:	$H_A: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$
Prüfgröße:	$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{n_1 \cdot S_1^2 / (n_1 - 1)}{n_2 \cdot S_2^2 / (n_2 - 1)}$
Testverteilung: Freiheitsgraden	F ist F-verteilt mit $v_1 = n_1 - 1$ und $v_2 = n_2 - 1$
Kritischer Bereich:	$[F_c; +\infty]$ $F_c = F_{1-\alpha, v_1, v_2}$

Zweistichprobentests für die Differenz zweier Anteilswerte

Voraussetzungen:

- Beide Stichproben sind voneinander unabhängig.
- n_1 und n_2 sind so groß, daß die Anteilswerte als normalverteilt angesehen werden können.

Nullhypothese:	$H_0: p_1 - p_2 = 0$
Alternativhypothese:	$H_A: p_1 - p_2 \neq 0$

Prüfgröße:	$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$ $\text{wobei } \hat{p} = \frac{n_1 \cdot \hat{p}_1 + n_2 \cdot \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$
Testverteilung:	Z ist annähernd N (0,1)-verteilt
Kritischer Bereich:	$(-\infty; z_u] \cup [z_o; +\infty)$ $z_u = z_{\alpha/2}$, $z_o = z_{1-\alpha/2}$

Tests im klassischen linearen Regressionsmodell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{i1} + \beta_2 \cdot x_{i2} + \dots + \beta_k \cdot x_{ik} + \dots + \beta_K \cdot x_{iK} + \varepsilon_i \quad (i=1, \dots, n)$$

Test der Gesamterklärungsgüte (F-Test)

Nullhypothese:	$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = \dots = \beta_K = 0$
Alternativhypothese:	$H_A: \beta_k \neq 0 \quad (k=1, \dots, K)$
Prüfgröße:	$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-K-1}{K}$
Testverteilung: Freiheitsgraden	F ist F-verteilt mit $v_1 = K$ und $v_2 = n - K - 1$
Kritischer Bereich:	$[F_c; +\infty)$ $F_c = F_{1-\alpha, K, n-K-1}$

Signifikanztest für die einzelnen MKQ/OLS-Koeffizienten b_k (t-Test)

Zweiseitige Fragestellung

Nullhypothese:	$H_0: \beta_k = 0$
Alternativhypothese:	$H_A: \beta_k \neq 0$
Prüfgröße:	$t = \frac{b_k - (\beta_k = 0)}{s_{b_k}}$ $\text{wobei } s_{b_k} = \sqrt{\widehat{\text{Var}}(b_k)} = \frac{e' e}{n-K-1} \cdot (X' X)^{-1}_{kk} \quad \text{und}$ $e = y - \hat{y}$
Testverteilung:	t ist t-verteilt mit $v = n - K - 1$ Freiheitsgraden
Kritischer Bereich:	$]-\infty; -t_u] \cup [t_o; +\infty[$ $t_u = -t_c = t_{\alpha/2, n-K-1}$ $t_o = t_c = t_{1-\alpha/2, n-K-1}$

IX Verteilungstests

Chi-Quadrat-Verteilungstest

Einfache Hypothese

Nullhypothese: H_0 : Das Merkmal folgt einer bestimmten, genau festgelegten Verteilung.

Alternativhypothese: H_A : Das Merkmal folgt dieser bestimmten, genau festgelegten Verteilung nicht.

Prüfgröße:
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

Testverteilung: χ^2 ist χ^2 -verteilt mit $v = k - 1$ Freiheitsgraden.
(k ist die Anzahl der Merkmalsausprägungen)
Faustregel für die Anwendung: $n \cdot p_i \geq 5$ für $i = 1, \dots, k$

Kritischer Bereich:
$$[\chi_c^2; +\infty)$$

$$\chi_c^2 = \chi_{1-\alpha}^2(k-1)$$

Zusammengesetzte Hypothese

Nullhypothese: H_0 : Das Merkmal folgt einer bestimmten Verteilung.

Alternativhypothese: H_A : Das Merkmal folgt dieser bestimmten Verteilung nicht.

Anmerkung: Parameter der Verteilung müssen geschätzt werden.

Prüfgröße:
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

Testverteilung: χ^2 ist χ^2 -verteilt mit $v = k - 1 - m$ Freiheitsgraden.
(k ist die Anzahl der Merkmalsausprägungen,
 m ist die Anzahl der geschätzten Parameter der Verteilung)
Faustregel für die Anwendung: $n \cdot p_i \geq 5$ für $i = 1, \dots, k$

Kritischer Bereich:
$$[\chi_c^2; +\infty)$$

$$\chi_c^2 = \chi_{1-\alpha}^2(k-1-m)$$

Kolmogorov-Smirnov-Verteilungstest

Nullhypothese: H_0 : Das Merkmal folgt einer bestimmten, genau festgelegten Verteilung.

Alternativhypothese: H_A : Das Merkmal folgt dieser bestimmten, genau festgelegten Verteilung nicht.

Prüfgröße:
$$d = \max_{z_i} \begin{cases} |F^e(z_i) - F^o(z_{i-1})| \\ |F^e(z_i) - F^o(z_i)| \end{cases}$$

wobei $F^e(z)$ die Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit (expected) und $F^o(z)$ die Summenhäufigkeitsfunktion der Stichprobe (observed) ist.

Testverteilung: d ist Kolmogorov-Smirnov-verteilt: $d \sim d_{1-\alpha, n}$
(n ist der Stichprobenumfang)

Kritischer Bereich: $[d_c; +\infty)$
 $d_c = d_{1-\alpha, n}$

Tabelle der Kolmogorov-Smirnov-Verteilung für $\alpha=0,1$ und $\alpha=0,05$

(Quelle: J. Schwarze, Grundlagen der Statistik II, 1993, S. 254):

n	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	n	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	n	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	n	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$
3	0,636	0,708	13	0,325	0,361	23	0,247	0,275	33	0,208	0,231
4	0,565	0,624	14	0,314	0,349	24	0,242	0,269	34	0,205	0,227
5	0,509	0,563	15	0,304	0,338	25	0,238	0,264	35	0,202	0,224
6	0,468	0,519	16	0,295	0,327	26	0,233	0,259	36	0,199	0,221
7	0,436	0,483	17	0,286	0,318	27	0,229	0,254	37	0,196	0,218
8	0,410	0,454	18	0,278	0,309	28	0,225	0,250	38	0,194	0,215
9	0,387	0,430	19	0,271	0,301	29	0,221	0,246	39	0,191	0,213
10	0,369	0,409	20	0,265	0,294	30	0,218	0,242	40	0,189	0,210
11	0,352	0,391	21	0,259	0,287	31	0,214	0,238	50	0,170	0,188
12	0,338	0,375	22	0,253	0,281	32	0,211	0,234	100	0,121	0,134

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

Nullhypothese: H_0 : Die Merkmale A und B sind voneinander unabhängig.

Alternativhypothese: H_A : Die Merkmale A und B sind voneinander abhängig.

Prüfgröße:
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{\tilde{n}_{ij}}$$

wobei n_{ij} die beobachteten absoluten Häufigkeiten und

$\tilde{n}_{ij} = \frac{n_{i \cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n}$ die absoluten Häufigkeiten bei

Unabhängigkeit sind.

Testverteilung:

χ^2 ist χ^2 -verteilt mit $\nu = (r-1) \cdot (s-1)$ Freiheitsgraden

Kritischer Bereich:

$$[\chi_c^2; +\infty)$$

$$\chi_c^2 = \chi_{1-\alpha}^2((r-1) \cdot (s-1))$$

Binomialverteilung

(Quelle: eigene Berechnungen)

p → n	x	0,05		0,1		0,15		0,2		0,25		0,3		0,35		0,4		0,45		0,5	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
1	0	0,9500	0,9500	0,9000	0,9000	0,8500	0,8500	0,8000	0,8000	0,7500	0,7500	0,7000	0,7000	0,6500	0,6500	0,6000	0,6000	0,5500	0,5500	0,5000	0,5000
1	1	0,0500	1,0000	0,1000	1,0000	0,1500	1,0000	0,2000	1,0000	0,2500	1,0000	0,3000	1,0000	0,3500	1,0000	0,4000	1,0000	0,4500	1,0000	0,5000	1,0000
2	0	0,9025	0,9025	0,8100	0,8100	0,7225	0,7225	0,6400	0,6400	0,5625	0,5625	0,4900	0,4900	0,4225	0,4225	0,3600	0,3600	0,3025	0,3025	0,2500	0,2500
2	1	0,0950	0,9975	0,1800	0,9900	0,2550	0,9775	0,3200	0,9600	0,3750	0,9375	0,4200	0,9100	0,4550	0,8775	0,4800	0,8400	0,4950	0,7975	0,5000	0,7500
2	2	0,0025	1,0000	0,0100	1,0000	0,0225	1,0000	0,0400	1,0000	0,0625	1,0000	0,0900	1,0000	0,1225	1,0000	0,1600	1,0000	0,2025	1,0000	0,2500	1,0000
3	0	0,8574	0,8574	0,7290	0,7290	0,6141	0,6141	0,5120	0,5120	0,4219	0,4219	0,3430	0,3430	0,2746	0,2746	0,2160	0,2160	0,1664	0,1664	0,1250	0,1250
3	1	0,1354	0,9928	0,2430	0,9720	0,3251	0,9393	0,3840	0,8960	0,4219	0,8438	0,4410	0,7840	0,4436	0,7163	0,4320	0,6480	0,4084	0,5748	0,3750	0,5000
3	2	0,0071	0,9999	0,0270	0,9990	0,0574	0,9966	0,0960	0,9920	0,1406	0,9844	0,1890	0,9730	0,2389	0,9571	0,2880	0,9360	0,3341	0,9089	0,3750	0,8750
3	3	0,0001	1,0000	0,0010	1,0000	0,0034	1,0000	0,0080	1,0000	0,0156	1,0000	0,0270	1,0000	0,0429	1,0000	0,0640	1,0000	0,0911	1,0000	0,1250	1,0000
4	0	0,8145	0,8145	0,6561	0,6561	0,5220	0,5220	0,4096	0,4096	0,3164	0,3164	0,2401	0,2401	0,1785	0,1785	0,1296	0,1296	0,0915	0,0915	0,0625	0,0625
4	1	0,1715	0,9860	0,2916	0,9477	0,3685	0,8905	0,4096	0,8192	0,4219	0,7383	0,4116	0,6517	0,3845	0,5630	0,3456	0,4752	0,2995	0,3910	0,2500	0,3125
4	2	0,0135	0,9995	0,0486	0,9963	0,0975	0,9880	0,1536	0,9728	0,2109	0,9492	0,2646	0,9163	0,3105	0,8735	0,3456	0,8208	0,3675	0,7585	0,3750	0,6875
4	3	0,0005	1,0000	0,0036	0,9999	0,0115	0,9995	0,0256	0,9984	0,0469	0,9961	0,0756	0,9919	0,1115	0,9850	0,1536	0,9744	0,2005	0,9590	0,2500	0,9375
4	4	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0005	1,0000	0,0016	1,0000	0,0039	1,0000	0,0081	1,0000	0,0150	1,0000	0,0256	1,0000	0,0410	1,0000	0,0625	1,0000
5	0	0,7738	0,7738	0,5905	0,5905	0,4437	0,4437	0,3277	0,3277	0,2373	0,2373	0,1681	0,1681	0,1160	0,1160	0,0778	0,0778	0,0503	0,0503	0,0313	0,0313
5	1	0,2036	0,9774	0,3281	0,9185	0,3915	0,8352	0,4096	0,7373	0,3955	0,6328	0,3602	0,5282	0,3124	0,4284	0,2592	0,3370	0,2059	0,2562	0,1563	0,1875
5	2	0,0214	0,9988	0,0729	0,9914	0,1382	0,9734	0,2048	0,9421	0,2637	0,8965	0,3087	0,8369	0,3364	0,7648	0,3456	0,6826	0,3369	0,5931	0,3125	0,5000
5	3	0,0011	1,0000	0,0081	0,9995	0,0244	0,9978	0,0512	0,9933	0,0879	0,9844	0,1323	0,9692	0,1811	0,9460	0,2304	0,9130	0,2757	0,8688	0,3125	0,8125
5	4	0,0000	1,0000	0,0005	1,0000	0,0022	0,9999	0,0064	0,9997	0,0146	0,9990	0,0284	0,9976	0,0488	0,9947	0,0768	0,9898	0,1128	0,9815	0,1563	0,9688
5	5	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0003	1,0000	0,0010	1,0000	0,0024	1,0000	0,0053	1,0000	0,0102	1,0000	0,0185	1,0000	0,0313	1,0000
6	0	0,7351	0,7351	0,5314	0,5314	0,3771	0,3771	0,2621	0,2621	0,1780	0,1780	0,1176	0,1176	0,0754	0,0754	0,0467	0,0467	0,0277	0,0277	0,0156	0,0156
6	1	0,2321	0,9672	0,3543	0,8857	0,3993	0,7765	0,3932	0,6554	0,3560	0,5339	0,3025	0,4202	0,2437	0,3191	0,1866	0,2333	0,1359	0,1636	0,0938	0,1094
6	2	0,0305	0,9978	0,0984	0,9842	0,1762	0,9527	0,2458	0,9011	0,2966	0,8306	0,3241	0,7443	0,3280	0,6471	0,3110	0,5443	0,2780	0,4415	0,2344	0,3438
6	3	0,0021	0,9999	0,0146	0,9987	0,0415	0,9941	0,0819	0,9830	0,1318	0,9624	0,1852	0,9295	0,2355	0,8826	0,2765	0,8208	0,3032	0,7447	0,3125	0,6563
6	4	0,0001	1,0000	0,0012	0,9999	0,0055	0,9996	0,0154	0,9984	0,0330	0,9954	0,0595	0,9891	0,0951	0,9777	0,1382	0,9590	0,1861	0,9308	0,2344	0,8906
6	5	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0004	1,0000	0,0015	0,9999	0,0044	0,9998	0,0102	0,9993	0,0205	0,9982	0,0369	0,9959	0,0509	0,9917	0,0938	0,9844
6	6	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0002	1,0000	0,0007	1,0000	0,0018	1,0000	0,0041	1,0000	0,0083	1,0000	0,0156	1,0000
7	0	0,6983	0,6983	0,4783	0,4783	0,3206	0,3206	0,2097	0,2097	0,1335	0,1335	0,0824	0,0824	0,0490	0,0490	0,0280	0,0280	0,0152	0,0152	0,0078	0,0078
7	1	0,2573	0,9556	0,3720	0,8503	0,3960	0,7166	0,3670	0,5767	0,3115	0,4449	0,2471	0,3294	0,1848	0,2338	0,1306	0,1586	0,0872	0,1024	0,0547	0,0625
7	2	0,0406	0,9962	0,1240	0,9743	0,2097	0,9262	0,2753	0,8520	0,3115	0,7564	0,3177	0,6471	0,2985	0,5323	0,2513	0,4199	0,2140	0,3164	0,1641	0,2266
7	3	0,0036	0,9998	0,0230	0,9973	0,0617	0,9879	0,1147	0,9667	0,1730	0,9294	0,2269	0,8740	0,2579	0,8002	0,2303	0,7102	0,2318	0,6083	0,2734	0,5000
7	4	0,0002	1,0000	0,0026	0,9998	0,0109	0,9988	0,0287	0,9953	0,0577	0,9871	0,0972	0,9712	0,1442	0,9444	0,1935	0,9037	0,2388	0,8471	0,2734	0,7734
7	5	0,0000	1,0000	0,0002	1,0000	0,0012	0,9999	0,0043	0,9996	0,0115	0,9987	0,0250	0,9962	0,0466	0,9910	0,0774	0,9812	0,1172	0,9643	0,1641	0,9375
7	6	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0004	1,0000	0,0013	0,9999	0,0036	0,9999	0,0084	0,9994	0,0172	0,9984	0,0320	0,9963	0,0547	0,9922
7	7	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0002	1,0000	0,0006	1,0000	0,0016	1,0000	0,0037	1,0000	0,0078	1,0000

Binomialverteilung

(Quelle: eigene Berechnungen)

p → n	x	0,05		0,1		0,15		0,2		0,25		0,3		0,35		0,4		0,45		0,5	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
8	0	0,6634	0,6634	0,4305	0,4305	0,2725	0,2725	0,1678	0,1678	0,1001	0,1001	0,0576	0,0576	0,0319	0,0319	0,0168	0,0168	0,0084	0,0084	0,0039	0,0039
8	1	0,2793	0,9428	0,3826	0,8131	0,3847	0,6572	0,3355	0,5033	0,2670	0,3671	0,1977	0,2553	0,1373	0,1691	0,0896	0,1064	0,0548	0,0632	0,0313	0,0352
8	2	0,0515	0,9942	0,1488	0,9619	0,2376	0,8948	0,2936	0,7969	0,3115	0,6785	0,2965	0,5518	0,2587	0,4278	0,2090	0,3154	0,1569	0,2201	0,1094	0,1445
8	3	0,0054	0,9996	0,0331	0,9950	0,0839	0,9786	0,1468	0,9437	0,2076	0,8862	0,2541	0,8059	0,2786	0,7064	0,2787	0,5941	0,2568	0,4770	0,2188	0,3633
8	4	0,0004	1,0000	0,0046	0,9996	0,0185	0,9971	0,0459	0,9896	0,0865	0,9727	0,1361	0,9420	0,1875	0,8939	0,2322	0,8263	0,2627	0,7396	0,2734	0,6367
8	5	0,0000	1,0000	0,0004	1,0000	0,0026	0,9998	0,0092	0,9988	0,0231	0,9958	0,0467	0,9887	0,0808	0,9747	0,1239	0,9502	0,1719	0,9115	0,2188	0,8555
8	6	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0011	0,9999	0,0038	0,9996	0,0100	0,9987	0,0217	0,9964	0,0413	0,9915	0,0703	0,9819	0,1094	0,9648
8	7	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0004	1,0000	0,0012	0,9999	0,0033	0,9998	0,0079	0,9993	0,0164	0,9983	0,0313	0,9961
8	8	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0002	1,0000	0,0007	1,0000	0,0017	1,0000	0,0039	1,0000
9	0	0,6302	0,6302	0,3874	0,3874	0,2316	0,2316	0,1342	0,1342	0,0751	0,0751	0,0404	0,0404	0,0207	0,0207	0,0101	0,0101	0,0046	0,0046	0,0020	0,0020
9	1	0,2985	0,9288	0,3874	0,7748	0,3679	0,5995	0,3020	0,4362	0,2253	0,3003	0,1556	0,1960	0,1004	0,1211	0,0605	0,0705	0,0339	0,0385	0,0176	0,0195
9	2	0,0629	0,9916	0,1722	0,9470	0,2597	0,8591	0,3020	0,7382	0,3003	0,6007	0,2668	0,4628	0,2162	0,3373	0,1612	0,2318	0,1110	0,1495	0,0703	0,0898
9	3	0,0077	0,9994	0,0446	0,9917	0,1069	0,9661	0,1762	0,9144	0,2336	0,8343	0,2668	0,7297	0,2716	0,6089	0,2508	0,4826	0,2119	0,3614	0,1641	0,2539
9	4	0,0006	1,0000	0,0074	0,9991	0,0283	0,9944	0,0661	0,9804	0,1168	0,9511	0,1715	0,9012	0,2194	0,8283	0,2508	0,7334	0,2600	0,6214	0,2461	0,5000
9	5	0,0000	1,0000	0,0008	0,9999	0,0050	0,9994	0,0165	0,9969	0,0389	0,9900	0,0735	0,9747	0,1181	0,9464	0,1672	0,9006	0,2128	0,8342	0,2461	0,7461
9	6	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0006	1,0000	0,0028	0,9997	0,0087	0,9987	0,0210	0,9957	0,0424	0,9888	0,0743	0,9750	0,1160	0,9502	0,1641	0,9102
9	7	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0003	1,0000	0,0012	0,9999	0,0039	0,9996	0,0098	0,9986	0,0212	0,9962	0,0407	0,9909	0,0703	0,9805
9	8	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0004	1,0000	0,0013	0,9999	0,0035	0,9997	0,0083	0,9992	0,0176	0,9980
9	9	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0003	1,0000	0,0008	1,0000	0,0020	1,0000
10	0	0,5987	0,5987	0,3487	0,3487	0,1969	0,1969	0,1074	0,1074	0,0563	0,0563	0,0282	0,0282	0,0135	0,0135	0,0060	0,0060	0,0025	0,0025	0,0010	0,0010
10	1	0,3151	0,9139	0,3874	0,7361	0,3474	0,5443	0,2584	0,3758	0,1877	0,2440	0,1211	0,1493	0,0725	0,0860	0,0403	0,0464	0,0207	0,0233	0,0098	0,0107
10	2	0,0746	0,9885	0,1937	0,9298	0,2759	0,8202	0,3020	0,6778	0,2816	0,5256	0,2335	0,3828	0,1757	0,2616	0,1209	0,1673	0,0763	0,0996	0,0439	0,0547
10	3	0,0105	0,9990	0,0574	0,9872	0,1298	0,9500	0,2013	0,8791	0,2503	0,7759	0,2668	0,6496	0,2522	0,5138	0,2150	0,3823	0,1665	0,2660	0,1172	0,1719
10	4	0,0010	0,9999	0,0112	0,9984	0,0401	0,9901	0,0881	0,9672	0,1460	0,9219	0,2001	0,8497	0,2377	0,7515	0,2508	0,6331	0,2384	0,5044	0,2051	0,3770
10	5	0,0001	1,0000	0,0015	0,9999	0,0085	0,9986	0,0264	0,9936	0,0584	0,9803	0,1029	0,9527	0,1536	0,9051	0,2007	0,8338	0,2340	0,7384	0,2461	0,6230
10	6	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0012	0,9999	0,0055	0,9991	0,0162	0,9965	0,0368	0,9894	0,0689	0,9740	0,1115	0,9452	0,1596	0,8980	0,2051	0,8281
10	7	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0008	0,9999	0,0031	0,9996	0,0090	0,9984	0,0212	0,9952	0,0425	0,9877	0,0746	0,9726	0,1172	0,9453
10	8	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0004	1,0000	0,0014	0,9999	0,0043	0,9995	0,0106	0,9983	0,0229	0,9955	0,0439	0,9893
10	9	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0005	1,0000	0,0016	0,9999	0,0042	0,9997	0,0098	0,9990
10	10	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0003	1,0000	0,0010	1,0000
11	0	0,5668	0,5668	0,3138	0,3138	0,1673	0,1673	0,0859	0,0859	0,0422	0,0422	0,0198	0,0198	0,0088	0,0088	0,0036	0,0036	0,0014	0,0014	0,0005	0,0005
11	1	0,3293	0,8981	0,3835	0,6974	0,3248	0,4922	0,2362	0,3221	0,1549	0,1971	0,0932	0,1130	0,0518	0,0606	0,0266	0,0302	0,0125	0,0139	0,0054	0,0059
11	2	0,0867	0,9848	0,2131	0,9104	0,2866	0,7788	0,2953	0,6174	0,2581	0,4552	0,1998	0,3127	0,1395	0,2001	0,0887	0,1189	0,0513	0,0652	0,0269	0,0327
11	3	0,0137	0,9984	0,0710	0,9615	0,1517	0,9306	0,2215	0,8399	0,2581	0,7133	0,2568	0,5656	0,2254	0,4256	0,1774	0,2963	0,1259	0,1911	0,0806	0,1133
11	4	0,0014	0,9999	0,0158	0,9972	0,0536	0,9841	0,1107	0,9496	0,1721	0,8854	0,2201	0,7897	0,2428	0,6683	0,2365	0,5328	0,2060	0,3971	0,1611	0,2744
11	5	0,0001	1,0000	0,0025	0,9997	0,0132	0,9973	0,0388	0,9893	0,0803	0,9657	0,1321	0,9218	0,1830	0,8513	0,2207	0,7535	0,2360	0,6331	0,2256	0,5000
11	6	0,0000	1,0000	0,0003	1,0000	0,0023	0,9997	0,0097	0,9980	0,0268	0,9924	0,0566	0,9784	0,0985	0,9499	0,1471	0,9006	0,1931	0,8262	0,2256	0,7256
11	7	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0003	1,0000	0,0017	0,9998	0,0054	0,9988	0,0173	0,9957	0,0379	0,9878	0,0701	0,9707	0,1128	0,9390	0,1611	0,8867
11	8	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0002	1,0000	0,0011	0,9999	0,0037	0,9994	0,0102	0,9980	0,0234	0,9941	0,0462	0,9852	0,0806	0,9673
11	9	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0005	1,0000	0,0018	0,9998	0,0052	0,9993	0,0126	0,9978	0,0269	0,9941
11	10	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0002	1,0000	0,0007	1,0000	0,0021	0,9998	0,0054	0,9995
11	11	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0002	1,0000	0,0005	1,0000

Binomialverteilung

(Quelle: eigene Berechnungen)

p-> n	x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
15	1	0,3658	0,3432	0,2312	0,1319	0,0668	0,0305	0,0126	0,0047	0,0016	0,0005
15	2	0,1348	0,9638	0,2856	0,6042	0,1559	0,2361	0,0476	0,0219	0,0090	0,0032
15	3	0,0307	0,9945	0,2184	0,8227	0,2252	0,4813	0,1110	0,0634	0,0318	0,0139
15	4	0,0049	0,9994	0,1156	0,9383	0,2252	0,6865	0,1792	0,1268	0,0780	0,0417
15	5	0,0006	0,9999	0,0449	0,9632	0,1651	0,8516	0,2123	0,1859	0,1404	0,0916
15	6	0,0000	1,0000	0,0132	0,9964	0,0917	0,9434	0,1906	0,2066	0,1914	0,1527
15	7	0,0000	1,0000	0,0030	0,9994	0,0393	0,9827	0,1319	0,1771	0,2013	0,1964
15	8	0,0000	1,0000	0,0005	0,9999	0,0131	0,9958	0,0710	0,1181	0,1647	0,1964
15	9	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0034	0,9992	0,0298	0,0612	0,1048	0,1527
15	10	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0007	0,9999	0,0096	0,0245	0,0515	0,0916
15	11	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0024	0,0074	0,0191	0,0417
15	12	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0004	0,0016	0,0052	0,0139
15	13	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0032
15	14	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005
15	15	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
16	1	0,3706	0,8108	0,2097	0,2839	0,0535	0,0635	0,0087	0,0030	0,0009	0,0002
16	2	0,1463	0,9571	0,2775	0,5614	0,1336	0,1971	0,0353	0,0150	0,0056	0,0018
16	3	0,0359	0,9930	0,2285	0,7899	0,2079	0,4050	0,0888	0,0468	0,0215	0,0085
16	4	0,0061	0,9991	0,1311	0,9209	0,2252	0,6302	0,2040	0,1666	0,0572	0,0278
16	5	0,0008	0,9999	0,0555	0,9765	0,1802	0,8103	0,2099	0,1982	0,1123	0,0667
16	6	0,0001	1,0000	0,0180	0,9944	0,1101	0,9204	0,1649	0,1989	0,1246	0,0728
16	7	0,0000	1,0000	0,0045	0,9998	0,0524	0,9729	0,1010	0,1889	0,1122	0,0418
16	8	0,0000	1,0000	0,0009	0,9999	0,0197	0,9925	0,0487	0,1417	0,1812	0,0582
16	9	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0058	0,9984	0,0185	0,0840	0,1318	0,0728
16	10	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0014	0,9997	0,0056	0,0392	0,0755	0,0949
16	11	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0002	1,0000	0,0013	0,0142	0,0337	0,0667
16	12	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0004	0,0040	0,0115	0,0278
16	13	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0002	0,0008	0,0029	0,0085
16	14	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
16	15	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
16	16	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
17	0	0,4181	0,1688	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
17	1	0,3741	0,7927	0,1893	0,2525	0,0426	0,0501	0,0060	0,0019	0,0005	0,0001
17	2	0,1575	0,9497	0,2673	0,5198	0,1136	0,1637	0,0260	0,0102	0,0035	0,0010
17	3	0,0415	0,9912	0,2359	0,7556	0,1893	0,3530	0,0701	0,0341	0,0144	0,0052
17	4	0,0076	0,9988	0,1457	0,9013	0,2209	0,5739	0,1320	0,0796	0,0411	0,0182
17	5	0,0010	0,9999	0,0595	0,9668	0,1914	0,7653	0,2081	0,1379	0,0875	0,0472
17	6	0,0001	1,0000	0,0236	0,9917	0,1276	0,8929	0,1991	0,1839	0,1432	0,0944
17	7	0,0000	1,0000	0,0065	0,9983	0,0668	0,9598	0,1685	0,1927	0,1841	0,1484
17	8	0,0000	1,0000	0,0007	0,9999	0,0279	0,9876	0,1134	0,1606	0,1883	0,1855
17	9	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0014	0,9997	0,0084	0,0107	0,0154	0,0166
17	10	0,0000	1,0000	0,0003	1,0000	0,0093	0,9969	0,0611	0,1070	0,1540	0,1855
17	11	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0025	0,9994	0,0263	0,0571	0,1008	0,1484
17	12	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0005	0,9999	0,0090	0,0242	0,0525	0,0944

Binomialverteilung

(Quelle: eigene Berechnungen)

p-> n	x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
17	12	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0024	0,9994	0,0215	0,9914
17	13	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0005	0,9999	0,0068	0,9981
17	14	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0016	0,9997
17	15	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0003	1,0000
17	16	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
17	17	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
18	0	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
18	1	0,3763	0,3002	0,1704	0,0811	0,0338	0,0126	0,0042	0,0012	0,0003	0,0001
18	2	0,1683	0,2835	0,2556	0,2713	0,0958	0,0458	0,0190	0,0069	0,0022	0,0006
18	3	0,0473	0,9891	0,2406	0,7202	0,1704	0,1046	0,0547	0,0328	0,0095	0,0120
18	4	0,0093	0,9985	0,0700	0,9718	0,2130	0,1681	0,1104	0,0942	0,0291	0,0411
18	5	0,0014	0,9998	0,0218	0,9936	0,0787	0,2017	0,1664	0,1146	0,0666	0,1077
18	6	0,0002	0,9988	0,0301	0,9882	0,1435	0,1873	0,1941	0,1655	0,1181	0,2258
18	7	0,0000	1,0000	0,0010	0,9998	0,0091	0,1376	0,1792	0,1892	0,1657	0,3915
18	8	0,0000	1,0000	0,0022	0,9995	0,0376	0,0811	0,1327	0,1734	0,1864	0,7368
18	9	0,0000	1,0000	0,0004	0,9999	0,0139	0,0386	0,0794	0,1284	0,1694	0,7473
18	10	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0042	0,0149	0,0385	0,0771	0,1248	0,8720
18	11	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0010	0,0046	0,0151	0,0374	0,0942	0,9463
18	12	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0002	0,0012	0,0047	0,0145	0,0354	0,9817
18	13	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0045	0,0134	0,9951
18	14	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0039	0,9990
18	15	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,9999
18	16	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	1,0000
18	17	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
18	18	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
19	0	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
19	1	0,3774	0,2852	0,1529	0,0885	0,0268	0,0093	0,0029	0,0008	0,0002	0,0000
19	2	0,1787	0,9335	0,2428	0,4413	0,0803	0,0358	0,0138	0,0046	0,0013	0,0003
19	3	0,0533	0,9868	0,2428	0,6841	0,1517	0,0869	0,0422	0,0175	0,0062	0,0018
19	4	0,0112	0,9980	0,0798	0,8850	0,2023	0,1491	0,0909	0,0457	0,0203	0,0074
19	5	0,0018	0,9998	0,0266	0,9914	0,0907	0,1916	0,1468	0,0933	0,0497	0,0777
19	6	0,0002	1,0000	0,0037	0,9837	0,1574	0,1916	0,1844	0,1451	0,0949	0,1727
19	7	0,0000	1,0000	0,0122	0,9959	0,0974	0,1525	0,1844	0,1797	0,1443	0,3169
19	8	0,0000	1,0000	0,0032	0,9992	0,0487	0,0981	0,1499	0,1797	0,1771	0,6710
19	9	0,0000	1,0000	0,0007	0,9999	0,0198	0,0514	0,0980	0,1454	0,1771	0,6710
19	10	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0066	0,0220	0,0528	0,0976	0,1449	0,8159
19	11	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0018	0,0077	0,0233	0,0532	0,0970	0,9129
19	12	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0004	0,0022	0,0083	0,0237	0,0529	0,9658
19	13	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0085	0,0233	0,9891
19	14	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0082	0,9972
19	15	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,9995
19	16	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,9999
19	17	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	1,0000
19	18	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
19	19	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000

Poisson-Verteilung

(Quelle: eigene Berechnungen)

m	x	0,01		0,02		0,03		0,04		0,05	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	0	0,9900	0,9900	0,9802	0,9802	0,9704	0,9704	0,9608	0,9608	0,9512	0,9512
1	1	0,0099	1,0000	0,0196	0,9998	0,0291	0,9996	0,0384	0,9992	0,0476	0,9988
2	2	0,0000	1,0000	0,0002	1,0000	0,0004	1,0000	0,0008	1,0000	0,0012	1,0000
3	3	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000

m	x	0,06		0,07		0,08		0,09		0,10	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	0	0,9418	0,9418	0,9324	0,9324	0,9231	0,9231	0,9139	0,9139	0,9048	0,9048
1	1	0,0565	0,9983	0,0653	0,9977	0,0738	0,9970	0,0823	0,9962	0,0905	0,9953
2	2	0,0017	1,0000	0,0023	0,9999	0,0030	0,9999	0,0037	0,9999	0,0045	0,9998
3	3	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0002	1,0000

m	x	0,11		0,12		0,15		0,20		0,25	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	0	0,8958	0,8958	0,8869	0,8869	0,8607	0,8607	0,8187	0,8187	0,7788	0,7788
1	1	0,0985	0,9944	0,1064	0,9934	0,1291	0,9898	0,1637	0,9825	0,1947	0,9735
2	2	0,0054	0,9998	0,0064	0,9997	0,0097	0,9995	0,0164	0,9989	0,0243	0,9978
3	3	0,0002	1,0000	0,0003	1,0000	0,0005	1,0000	0,0011	0,9999	0,0020	0,9999
4	4	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000

m	x	0,30		0,35		0,40		0,45		0,50	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	0	0,7408	0,7408	0,7047	0,7047	0,6703	0,6703	0,6376	0,6376	0,6065	0,6065
1	1	0,2222	0,9631	0,2466	0,9513	0,2681	0,9384	0,2869	0,9246	0,3033	0,9098
2	2	0,0333	0,9964	0,0432	0,9945	0,0536	0,9921	0,0646	0,9891	0,0758	0,9856
3	3	0,0033	0,9997	0,0050	0,9995	0,0072	0,9992	0,0097	0,9988	0,0126	0,9982
4	4	0,0003	1,0000	0,0004	1,0000	0,0007	0,9999	0,0011	0,9999	0,0016	0,9998
5	5	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0002	1,0000

m	x	0,55		0,60		0,65		0,70		0,75	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	0	0,5769	0,5769	0,5488	0,5488	0,5220	0,5220	0,4966	0,4966	0,4724	0,4724
1	1	0,3173	0,8943	0,3293	0,8781	0,3393	0,8614	0,3476	0,8442	0,3543	0,8266
2	2	0,0873	0,9815	0,0988	0,9769	0,1103	0,9717	0,1217	0,9659	0,1329	0,9595
3	3	0,0160	0,9975	0,0198	0,9966	0,0239	0,9956	0,0284	0,9942	0,0332	0,9927
4	4	0,0022	0,9997	0,0030	0,9996	0,0039	0,9994	0,0050	0,9992	0,0062	0,9989
5	5	0,0002	1,0000	0,0004	1,0000	0,0005	0,9999	0,0007	0,9999	0,0009	0,9999
6	6	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000

m	x	0,80		0,85		0,90		0,95		1,00	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	0	0,4493	0,4493	0,4274	0,4274	0,4066	0,4066	0,3867	0,3867	0,3679	0,3679
1	1	0,3595	0,8088	0,3633	0,7907	0,3659	0,7725	0,3674	0,7541	0,3679	0,7358
2	2	0,1438	0,9526	0,1544	0,9451	0,1647	0,9371	0,1745	0,9287	0,1839	0,9197
3	3	0,0383	0,9909	0,0437	0,9889	0,0494	0,9865	0,0553	0,9839	0,0613	0,9810
4	4	0,0077	0,9986	0,0093	0,9982	0,0111	0,9977	0,0131	0,9971	0,0153	0,9963
5	5	0,0012	0,9998	0,0016	0,9997	0,0020	0,9997	0,0025	0,9995	0,0031	0,9994
6	6	0,0002	1,0000	0,0002	1,0000	0,0003	1,0000	0,0004	0,9999	0,0005	0,9999
7	7	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000

Poisson-Verteilung

(Quelle: eigene Berechnungen)

m	x	1,10		1,20		1,30		1,40		1,50	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	0	0,3329	0,3329	0,3012	0,3012	0,2725	0,2725	0,2466	0,2466	0,2231	0,2231
1	1	0,3662	0,6990	0,3614	0,6626	0,3543	0,6268	0,3452	0,5918	0,3347	0,5578
2	2	0,2014	0,9004	0,2169	0,8795	0,2303	0,8571	0,2417	0,8335	0,2510	0,8088
3	3	0,0738	0,9743	0,0867	0,9662	0,0998	0,9569	0,1128	0,9463	0,1255	0,9344
4	4	0,0203	0,9946	0,0260	0,9923	0,0324	0,9893	0,0395	0,9857	0,0471	0,9814
5	5	0,0045	0,9990	0,0062	0,9985	0,0084	0,9978	0,0111	0,9968	0,0141	0,9955
6	6	0,0008	0,9999	0,0012	0,9997	0,0018	0,9996	0,0026	0,9994	0,0035	0,9991
7	7	0,0001	1,0000	0,0002	1,0000	0,0003	0,9999	0,0005	0,9999	0,0008	0,9998
8	8	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000

m	x	1,60		1,70		1,80		1,90		2,00	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	0	0,2019	0,2019	0,1827	0,1827	0,1653	0,1653	0,1496	0,1496	0,1353	0,1353
1	1	0,3230	0,5249	0,3106	0,4932	0,2975	0,4628	0,2842	0,4337	0,2707	0,4060
2	2	0,2584	0,7834	0,2640	0,7572	0,2678	0,7306	0,2700	0,7037	0,2707	0,6767
3	3	0,1378	0,9212	0,1496	0,9068	0,1607	0,8913	0,1710	0,8747	0,1804	0,8571
4	4	0,0551	0,9763	0,0636	0,9704	0,0723	0,9636	0,0812	0,9559	0,0902	0,9473
5	5	0,0176	0,9940	0,0216	0,9920	0,0260	0,9896	0,0309	0,9868	0,0361	0,9834
6	6	0,0047	0,9987	0,0061	0,9981	0,0078	0,9974	0,0098	0,9966	0,0120	0,9955
7	7	0,0011	0,9997	0,0015	0,9996	0,0020	0,9994	0,0027	0,9992	0,0034	0,9989
8	8	0,0002	1,0000	0,0003	0,9999	0,0005	0,9999	0,0006	0,9998	0,0009	0,9998
9	9	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0002	1,0000

m	x	2,10		2,20		2,30		2,40		2,50	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	0	0,1225	0,1225	0,1108	0,1108	0,1003	0,1003	0,0907	0,0907	0,0821	0,0821
1	1	0,2572	0,3796	0,2438	0,3546	0,2306	0,3309	0,2177	0,3084	0,2052	0,2873
2	2	0,2700	0,6496	0,2681	0,6227	0,2652	0,5960	0,2613	0,5697	0,2565	0,5438
3	3	0,1890	0,8386	0,1966	0,8194	0,2033	0,7993	0,2090	0,7787	0,2138	0,7576
4	4	0,0992	0,9379	0,1082	0,9275	0,1169	0,9162	0,1254	0,9041	0,1336	0,8912
5	5	0,0417	0,9796	0,0476	0,9751	0,0538	0,9700	0,0602	0,9643	0,0668	0,9580
6	6	0,0146	0,9941	0,0174	0,9925	0,0206	0,9906	0,0241	0,9884	0,0278	0,9858
7	7	0,0044	0,9985	0,0055	0,9980	0,0068	0,9974	0,0083	0,9967	0,0099	0,9958
8	8	0,0011	0,9997	0,0015	0,9995	0,0019	0,9994	0,0025	0,9991	0,0031	0,9989
9	9	0,0003	0,9999	0,0004	0,9999	0,0005	0,9999	0,0007	0,9998	0,0009	0,9997
10	10	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0002	1,0000	0,0002	0,9999
11	11	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000

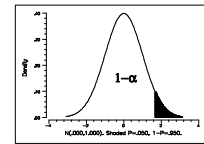
m	x	2,60		2,70		2,80		2,90		3,00	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
0	0	0,0743	0,0743	0,0672	0,0672	0,0608	0,0608	0,0550	0,0550	0,0498	0,0498
1	1	0,1931	0,2674	0,1815	0,2487	0,1703	0,2311	0,1596	0,2146	0,1494	0,1991
2	2	0,2510	0,5184	0,2450	0,4936	0,2384	0,4695	0,2314	0,4460	0,2240	0,4232
3	3	0,2176	0,7360	0,2205	0,7141	0,2225	0,6919	0,2237	0,6696	0,2240	0,6472
4	4	0,1414	0,8774	0,1488	0,8629	0,1557	0,8477	0,1622	0,8318	0,1680	0,8153
5	5	0,0735	0,9510	0,0804	0,9433	0,0872	0,9349	0,0940	0,9258	0,1008	0,9161
6	6	0,0319	0,9828	0,0362	0,9794	0,0407	0,9756	0,0455	0,9713	0,0504	0,9665
7	7	0,0118	0,9947	0,0139	0,9934	0,0163	0,9919	0,0188	0,9901	0,0216	0,9881
8	8	0,0038	0,9985	0,0047	0,9981	0,0057	0,9976	0,0068	0,9969	0,0081	0,9962
9	9	0,0011	0,9996	0,0014	0,9995	0,0018	0,9993	0,0022	0,9991	0,0027	0,9989
10	10	0,0003	0,9999	0,0004	0,9999	0,0005	0,9998	0,0006	0,9998	0,0008	0,9997
11	11	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0001	1,0000	0,0002	0,9999	0,0002	0,9999
12	12	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000

Poisson-Verteilung

(Quelle: eigene Berechnungen)

m	x	3,50		4,00		4,50		5,00		5,50	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
	0	0,0302	0,0302	0,0183	0,0183	0,0111	0,0111	0,0067	0,0067	0,0041	0,0041
	1	0,1057	0,1359	0,0733	0,0916	0,0500	0,0611	0,0337	0,0404	0,0225	0,0266
	2	0,1850	0,3208	0,1465	0,2381	0,1125	0,1736	0,0842	0,1247	0,0618	0,0884
	3	0,2158	0,5366	0,1954	0,4335	0,1687	0,3423	0,1404	0,2650	0,1133	0,2017
	4	0,1888	0,7254	0,1954	0,6288	0,1898	0,5321	0,1755	0,4405	0,1558	0,3575
	5	0,1322	0,8576	0,1563	0,7851	0,1708	0,7029	0,1755	0,6160	0,1714	0,5289
	6	0,0771	0,9347	0,1042	0,8893	0,1281	0,8311	0,1462	0,7622	0,1571	0,6860
	7	0,0385	0,9733	0,0595	0,9489	0,0824	0,9134	0,1044	0,8666	0,1234	0,8095
	8	0,0169	0,9901	0,0298	0,9786	0,0463	0,9597	0,0653	0,9319	0,0849	0,8944
	9	0,0066	0,9967	0,0132	0,9919	0,0232	0,9829	0,0363	0,9682	0,0519	0,9462
	10	0,0023	0,9990	0,0053	0,9972	0,0104	0,9933	0,0181	0,9863	0,0285	0,9747
	11	0,0007	0,9997	0,0019	0,9991	0,0043	0,9976	0,0082	0,9945	0,0143	0,9890
	12	0,0002	0,9999	0,0006	0,9997	0,0016	0,9992	0,0034	0,9980	0,0065	0,9955
	13	0,0001	1,0000	0,0002	0,9999	0,0006	0,9997	0,0013	0,9993	0,0028	0,9983
	14	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0002	0,9999	0,0005	0,9998	0,0011	0,9994
	15	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0002	0,9999	0,0004	0,9998
	16	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	0,9999
	17	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
	18	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000

m	x	6,00		7,00		8,00		9,00		10,00	
		f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
	0	0,0025	0,0025	0,0009	0,0009	0,0003	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,0149	0,0174	0,0064	0,0073	0,0027	0,0030	0,0011	0,0012	0,0005	0,0005
	2	0,0446	0,0620	0,0223	0,0296	0,0107	0,0138	0,0050	0,0062	0,0023	0,0028
	3	0,0892	0,1512	0,0521	0,0818	0,0286	0,0424	0,0150	0,0212	0,0076	0,0103
	4	0,1339	0,2851	0,0912	0,1730	0,0573	0,0996	0,0337	0,0550	0,0189	0,0293
	5	0,1606	0,4457	0,1277	0,3007	0,0916	0,1912	0,0607	0,1157	0,0378	0,0671
	6	0,1606	0,6063	0,1490	0,4497	0,1221	0,3134	0,0911	0,2068	0,0631	0,1301
	7	0,1377	0,7440	0,1490	0,5987	0,1396	0,4530	0,1171	0,3239	0,0901	0,2202
	8	0,1033	0,8472	0,1304	0,7291	0,1396	0,5925	0,1318	0,4557	0,1126	0,3328
	9	0,0688	0,9161	0,1014	0,8305	0,1241	0,7166	0,1318	0,5874	0,1251	0,4579
	10	0,0413	0,9574	0,0710	0,9015	0,0993	0,8159	0,1186	0,7060	0,1251	0,5830
	11	0,0225	0,9799	0,0452	0,9467	0,0722	0,8881	0,0970	0,8030	0,1137	0,6968
	12	0,0113	0,9912	0,0263	0,9730	0,0481	0,9362	0,0728	0,8758	0,0948	0,7916
	13	0,0052	0,9964	0,0142	0,9872	0,0296	0,9658	0,0504	0,9261	0,0729	0,8645
	14	0,0022	0,9986	0,0071	0,9943	0,0169	0,9827	0,0324	0,9585	0,0521	0,9165
	15	0,0009	0,9995	0,0033	0,9976	0,0090	0,9918	0,0194	0,9780	0,0347	0,9513
	16	0,0003	0,9998	0,0014	0,9990	0,0045	0,9963	0,0109	0,9889	0,0217	0,9730
	17	0,0001	0,9999	0,0006	0,9996	0,0021	0,9984	0,0058	0,9947	0,0128	0,9857
	18	0,0000	1,0000	0,0002	0,9999	0,0009	0,9993	0,0029	0,9976	0,0071	0,9928
	19	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0004	0,9997	0,0014	0,9989	0,0037	0,9965
	20	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0002	0,9999	0,0006	0,9996	0,0019	0,9984
	21	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000	0,0003	0,9998	0,0009	0,9993
	22	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	0,9999	0,0004	0,9997
	23	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0002	0,9999
	24	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0001	1,0000

Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung**N(0,1)** (Quelle: Hartung et al. 1982, S. 734)

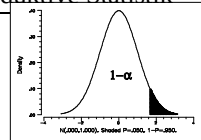
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Ablesebeispiel: $\Phi(1,56) = 0,9406$; $\Phi(z) = 1 - \alpha$ Erweiterung der Tafel: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ **Approximation nach Hastings** für $z > 0$

$$\Phi(z) \cong 1 - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot (a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 + a_5 \cdot t^5) \text{ mit } t = \frac{1}{1 + b \cdot z},$$

$$b = 0,2316419, \quad a_1 = 0,31938153, \quad a_2 = -0,356563782, \quad a_3 = 1,781477937, \\ a_4 = -1,821255978, \quad a_5 = 1,330274429.$$

Quantile z der Standardnormalverteilung



$N(0,1)$ (Quelle: Hartung et al. 1982, S. 735)

$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z
0,9999	3,7190	0,9975	2,8071	0,965	1,8119	0,83	0,9542
0,9998	3,5401	0,9970	2,7478	0,960	1,7507	0,82	0,9154
0,9997	3,4316	0,9965	2,6968	0,955	1,6954	0,81	0,8779
0,9996	3,3528	0,9960	2,6521	0,950	1,6449	0,80	0,8416
0,9995	3,2905	0,9955	2,6121	0,945	1,5982	0,79	0,8064
0,9994	3,2389	0,9950	2,5758	0,940	1,5548	0,78	0,7722
0,9993	3,1947	0,9945	2,5427	0,935	1,5141	0,76	0,7063
0,9992	3,1559	0,9940	2,5121	0,930	1,4758	0,74	0,6433
0,9991	3,1214	0,9935	2,4838	0,925	1,4395	0,72	0,5828
0,9990	3,0902	0,9930	2,4573	0,920	1,4051	0,70	0,5244
0,9989	3,0618	0,9925	2,4324	0,915	1,3722	0,68	0,4677
0,9988	3,0357	0,9920	2,4089	0,910	1,3408	0,66	0,4125
0,9987	3,0115	0,9915	2,3867	0,905	1,3106	0,64	0,3585
0,9986	2,9889	0,9910	2,3656	0,900	1,2816	0,62	0,3055
0,9985	2,9677	0,9905	2,3455	0,890	1,2265	0,60	0,2533
0,9984	2,9478	0,9900	2,3263	0,880	1,1750	0,58	0,2019
0,9983	2,9290	0,9850	2,1701	0,870	1,1264	0,56	0,1510
0,9982	2,9112	0,9800	2,0537	0,860	1,0803	0,54	0,1004
0,9981	2,8943	0,9750	1,9600	0,850	1,0364	0,52	0,0502
0,9980	2,8782	0,9700	1,8808	0,840	0,9945	0,50	0,0000

Ablesebeispiel: $z_{0,95} = 1,6449$

Erweiterung der Tafel: $z_{1-\alpha} = -z_{\alpha}$

Approximation nach Hastings für $0,5 < \Phi(z) < 1$

$$z \cong t - \frac{a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2}{1 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + b_3 \cdot t^3} \quad \text{mit } t = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - \Phi(z))},$$

$$\begin{array}{lll} a_0 = 2,515517, & a_1 = 0,802853, & a_2 = 0,010328, \\ b_1 = 1,432788, & b_2 = 0,189269, & b_3 = 0,001308. \end{array}$$

Häufig vorkommende z-Werte für die Bestimmung von Konfidenzintervallen

Z ist standardnormalverteilt

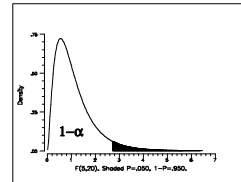
		Konfidenzintervall	
		zweiseitig	einseitig
Häufig vorkommende z-Werte für:	$\alpha = 0,01$	$z = 2,58$	$z = 2,33$
	$\alpha = 0,05$	$z = 1,96$	$z = 1,65$
	$\alpha = 0,1$	$z = 1,65$	$z = 1,28$

v	1 - α										
	0,001	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,999
26	9,222	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	9,803	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	10,391	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	10,986	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	11,588	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
31	12,196	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003
32	12,811	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	13,431	15,815	17,074	19,047	20,867	23,110	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648
34	14,057	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964
35	14,688	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275
36	15,324	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581
37	15,965	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	48,363	52,192	55,668	59,893	62,883
38	16,611	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	49,513	53,384	56,896	61,162	64,181
39	17,262	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476
40	17,916	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
41	18,575	21,421	22,906	25,215	27,326	29,907	52,949	56,942	60,561	64,950	68,053
42	19,239	22,138	23,650	25,999	28,144	30,765	54,090	58,124	61,777	66,206	69,336
43	19,906	22,859	24,398	26,785	28,965	31,625	55,230	59,303	62,990	67,459	70,616
44	20,576	23,584	25,148	27,575	29,787	32,487	56,369	60,481	64,201	68,710	71,893
45	21,251	24,311	25,901	28,366	30,612	33,350	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166
46	21,929	25,041	26,657	29,160	31,439	34,215	58,641	62,830	66,617	71,201	74,437
47	22,610	25,775	27,416	29,956	32,268	35,081	59,774	64,001	67,821	72,443	75,704
48	23,295	26,511	28,177	30,755	33,098	35,949	60,907	65,171	69,023	73,683	76,969
49	23,983	27,249	28,941	31,555	33,930	36,818	62,038	66,339	70,222	74,919	78,231
50	24,674	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490

v	1 - α											
	0,001	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
51	25,368	28,735	30,475	33,162	35,600	38,560	64,295	68,669	72,616	77,386	80,747	87,968
52	26,065	29,481	31,246	33,968	36,437	39,433	65,422	69,832	73,810	78,616	82,001	89,272
53	26,765	30,230	32,018	34,776	37,276	40,308	66,548	70,993	75,002	79,843	83,253	90,573
54	27,468	30,981	32,793	35,586	38,116	41,183	67,673	72,153	76,192	81,069	84,502	91,872
55	28,173	31,735	33,570	36,398	38,958	42,060	68,796	73,311	77,380	82,292	85,749	93,168
56	28,881	32,490	34,350	37,212	39,801	42,937	69,919	74,468	78,567	83,513	86,994	94,461
57	29,592	33,248	35,131	38,027	40,646	43,816	71,040	75,624	79,752	84,733	88,236	95,751
58	30,305	34,008	35,913	38,844	41,492	44,696	72,160	76,778	80,936	85,950	89,477	97,039
59	31,020	34,770	36,698	39,662	42,339	45,577	73,279	77,931	82,117	87,166	90,715	98,324
60	31,738	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	99,607
61	32,459	36,300	38,273	41,303	44,038	47,342	75,514	80,232	84,476	89,591	93,186	100,888
62	33,181	37,068	39,063	42,126	44,889	48,226	76,630	81,381	85,654	90,802	94,419	102,166
63	33,906	37,838	39,855	42,950	45,741	49,111	77,745	82,529	86,830	92,010	95,649	103,442
64	34,633	38,610	40,649	43,776	46,595	49,996	78,860	83,675	88,004	93,217	96,878	104,716
65	35,362	39,383	41,444	44,603	47,450	50,883	79,973	84,821	89,177	94,422	98,105	105,988
66	36,093	40,158	42,240	45,431	48,305	51,770	81,085	85,965	90,349	95,626	99,330	107,258
67	36,826	40,935	43,038	46,261	49,162	52,659	82,197	87,108	91,519	96,828	100,554	108,526
68	37,561	41,713	43,838	47,092	50,020	53,548	83,308	88,250	92,689	98,028	101,776	109,791
69	38,298	42,494	44,639	47,924	50,879	54,438	84,418	89,391	93,856	99,228	102,996	111,055
70	39,036	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215	112,317
75	42,757	47,206	49,475	52,942	56,054	59,795	91,061	96,217	100,839	106,393	110,286	118,599
80	46,520	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321	124,839
85	50,320	55,170	57,634	61,389	64,749	68,777	102,079	107,522	112,393	118,236	122,325	131,041
90	54,155	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	137,208
95	58,022	63,250	65,898	69,925	73,520	77,818	113,038	118,752	123,858	129,973	134,247	143,344
100	61,918	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169	149,449

F-Verteilung:

In Abhängigkeit von v_1 und v_2 sind die Werte x der F-verteilten Zufallsvariablen tabelliert, bei denen die Verteilungsfunktion $(1-\alpha)$ die Werte 0,90; 0,95; 0,975; 0,99 und 0,995 annimmt (Quelle: J. Schwarze, Grundlagen der Statistik II, 1993, S. 301 - 305)



		$1-\alpha=0,900$																				
v_2	v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	50	100	∞	
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	59,14	59,69	60,12	60,46	60,98	61,36	61,64	61,86	62,04	62,58	62,85	63,01	63,33	63,33	63,33	
2	8,526	9,000	9,162	9,244	9,293	9,326	9,350	9,367	9,381	9,392	9,409	9,421	9,430	9,437	9,442	9,459	9,467	9,472	9,482	9,491	9,491	
3	5,538	5,462	5,390	5,343	5,309	5,285	5,266	5,251	5,240	5,230	5,215	5,204	5,196	5,189	5,184	5,167	5,159	5,154	5,143	5,134	5,134	
4	4,545	4,325	4,191	4,107	4,051	4,010	3,979	3,955	3,936	3,920	3,895	3,877	3,864	3,853	3,844	3,817	3,803	3,795	3,777	3,761	3,761	
5	4,060	3,780	3,619	3,520	3,453	3,404	3,368	3,339	3,316	3,297	3,268	3,247	3,230	3,217	3,206	3,174	3,157	3,147	3,126	3,105	3,105	
6	3,776	3,463	3,289	3,181	3,107	3,055	3,014	2,983	2,958	2,937	2,905	2,881	2,863	2,848	2,836	2,800	2,781	2,770	2,746	2,722	2,722	
7	3,569	3,257	3,074	2,961	2,883	2,827	2,782	2,752	2,725	2,703	2,668	2,643	2,623	2,607	2,595	2,555	2,535	2,523	2,497	2,471	2,471	
8	3,458	3,113	2,924	2,806	2,726	2,668	2,624	2,589	2,561	2,538	2,502	2,475	2,454	2,438	2,425	2,383	2,361	2,348	2,321	2,293	2,293	
9	3,360	3,006	2,813	2,693	2,611	2,551	2,505	2,469	2,440	2,416	2,379	2,351	2,329	2,312	2,298	2,255	2,232	2,218	2,189	2,159	2,159	
10	3,285	2,924	2,728	2,605	2,522	2,461	2,414	2,377	2,347	2,323	2,284	2,255	2,233	2,215	2,201	2,155	2,132	2,117	2,087	2,055	2,055	
11	3,225	2,859	2,660	2,536	2,451	2,389	2,342	2,304	2,274	2,248	2,209	2,179	2,156	2,138	2,123	2,076	2,052	2,036	2,005	1,972	1,972	
12	3,177	2,807	2,606	2,480	2,394	2,331	2,283	2,245	2,214	2,188	2,147	2,117	2,094	2,075	2,060	2,011	1,986	1,970	1,938	1,904	1,904	
13	3,136	2,763	2,560	2,434	2,347	2,283	2,234	2,195	2,164	2,138	2,097	2,066	2,042	2,023	2,007	1,958	1,931	1,915	1,882	1,846	1,846	
14	3,102	2,726	2,522	2,395	2,307	2,243	2,193	2,154	2,122	2,095	2,054	2,022	1,998	1,978	1,962	1,912	1,885	1,869	1,834	1,797	1,797	
15	3,073	2,695	2,490	2,361	2,273	2,208	2,158	2,119	2,086	2,059	2,017	1,985	1,961	1,941	1,924	1,873	1,845	1,828	1,793	1,755	1,755	
16	3,048	2,668	2,462	2,333	2,244	2,178	2,128	2,088	2,055	2,028	1,985	1,953	1,928	1,908	1,891	1,839	1,811	1,793	1,757	1,718	1,718	
17	3,026	2,645	2,437	2,308	2,218	2,152	2,102	2,061	2,028	2,001	1,958	1,925	1,900	1,879	1,862	1,809	1,781	1,763	1,726	1,686	1,686	
18	3,007	2,624	2,416	2,286	2,196	2,130	2,079	2,038	2,005	1,977	1,933	1,900	1,875	1,854	1,837	1,783	1,754	1,736	1,698	1,657	1,657	
19	2,990	2,605	2,397	2,266	2,176	2,109	2,058	2,017	1,984	1,956	1,912	1,878	1,852	1,831	1,814	1,759	1,730	1,711	1,673	1,631	1,631	
20	2,975	2,589	2,380	2,249	2,158	2,091	2,040	1,999	1,965	1,937	1,892	1,859	1,833	1,811	1,794	1,738	1,708	1,690	1,650	1,607	1,607	
21	2,961	2,574	2,365	2,233	2,142	2,075	2,023	1,982	1,948	1,920	1,875	1,841	1,815	1,793	1,776	1,719	1,689	1,670	1,630	1,586	1,586	
22	2,949	2,561	2,351	2,219	2,128	2,060	2,008	1,967	1,933	1,904	1,859	1,825	1,798	1,777	1,759	1,702	1,671	1,652	1,611	1,567	1,567	
23	2,937	2,549	2,339	2,207	2,115	2,047	1,995	1,953	1,919	1,890	1,845	1,811	1,784	1,762	1,744	1,686	1,655	1,636	1,594	1,549	1,549	
24	2,927	2,538	2,327	2,195	2,103	2,035	1,983	1,941	1,906	1,877	1,832	1,797	1,770	1,748	1,730	1,672	1,641	1,621	1,579	1,533	1,533	
25	2,918	2,528	2,317	2,184	2,092	2,024	1,971	1,929	1,895	1,866	1,820	1,785	1,758	1,736	1,718	1,659	1,627	1,607	1,565	1,518	1,518	
26	2,909	2,519	2,307	2,174	2,082	2,014	1,961	1,919	1,884	1,855	1,809	1,774	1,747	1,724	1,706	1,647	1,615	1,594	1,551	1,504	1,504	
27	2,901	2,511	2,299	2,165	2,073	2,005	1,951	1,909	1,874	1,845	1,799	1,764	1,736	1,714	1,695	1,636	1,603	1,583	1,539	1,491	1,491	
28	2,894	2,503	2,291	2,157	2,064	1,996	1,943	1,900	1,865	1,836	1,790	1,754	1,726	1,704	1,685	1,625	1,592	1,572	1,528	1,478	1,478	
29	2,887	2,495	2,283	2,149	2,057	1,988	1,934	1,892	1,857	1,827	1,781	1,745	1,717	1,695	1,676	1,616	1,583	1,562	1,517	1,467	1,467	
30	2,881	2,489	2,276	2,142	2,049	1,980	1,927	1,884	1,849	1,819	1,773	1,737	1,709	1,686	1,667	1,606	1,573	1,552	1,507	1,456	1,456	
40	2,835	2,440	2,226	2,091	1,997	1,927	1,872	1,829	1,793	1,763	1,715	1,678	1,649	1,625	1,605	1,541	1,506	1,483	1,434	1,377	1,377	
50	2,809	2,412	2,197	2,061	1,966	1,895	1,840	1,796	1,760	1,729	1,680	1,643	1,613	1,588	1,568	1,502	1,465	1,441	1,388	1,327	1,327	
60	2,791	2,393	2,177	2,041	1,946	1,875	1,819	1,775	1,738	1,707	1,657	1,620	1,589	1,564	1,543	1,476	1,437	1,413	1,358	1,291	1,291	
70	2,779	2,380	2,164	2,027	1,931	1,860	1,804	1,760	1,723	1,691	1,641	1,603	1,572	1,547	1,526	1,457	1,418	1,392	1,335	1,265	1,265	
80	2,769	2,370	2,153	2,016	1,921	1,849	1,793	1,748	1,711	1,680	1,629	1,590	1,559	1,534	1,513	1,443	1,403	1,377	1,318	1,245	1,245	
90	2,762	2,362	2,146	2,008	1,912	1,841	1,785	1,739	1,702	1,670	1,620	1,581	1,550	1,524	1,503	1,432	1,391	1,365	1,304	1,228	1,228	
100	2,756	2,356	2,139	2,002	1,906	1,834	1,778	1,732	1,695	1,663	1,612	1,573	1,542	1,516	1,494	1,423	1,382	1,355	1,293	1,214	1,214	
∞	2,706	2,303	2,084	1,945	1,847	1,774	1,717	1,670	1,632	1,599	1,546	1,505	1,471	1,444	1,421	1,342	1,295	1,263	1,185	1,000	1,000	

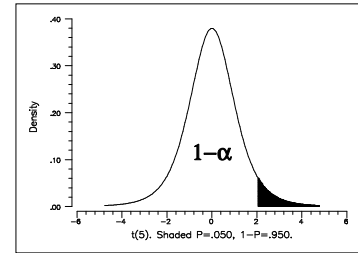
		$1 - \alpha = 0,950$																			
V_2	V_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	50	100	∞
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	50	100	∞
1	161,4	199,5	215,8	224,7	230,4	234,2	237,0	239,1	240,8	242,1	244,2	245,6	246,8	247,6	248,3	250,4	251,5	252,1	253,4	254,3	
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,42	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50	
3	10,13	9,55	9,28	9,12	8,94	8,89	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,71	8,69	8,67	8,66	8,62	8,59	8,58	8,54	8,53	
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964	5,912	5,873	5,844	5,821	5,803	5,746	5,717	5,699	5,658	5,628	
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,772	4,735	4,678	4,636	4,604	4,579	4,558	4,496	4,464	4,444	4,403	4,365	
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,206	4,147	4,099	4,060	4,000	3,956	3,922	3,896	3,874	3,808	3,773	3,753	3,711	3,669	
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,971	3,866	3,787	3,726	3,677	3,636	3,574	3,529	3,494	3,467	3,444	3,375	3,340	3,318	3,274	3,230	
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,687	3,581	3,500	3,438	3,388	3,347	3,284	3,237	3,202	3,173	3,150	3,079	3,042	3,020	2,974	2,928	
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179	3,137	3,073	3,025	2,989	2,960	2,936	2,864	2,826	2,803	2,755	2,707	
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,020	2,978	2,913	2,865	2,828	2,798	2,774	2,699	2,661	2,637	2,588	2,538	
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896	2,854	2,788	2,739	2,701	2,671	2,646	2,570	2,531	2,507	2,456	2,404	
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796	2,753	2,687	2,637	2,599	2,568	2,544	2,466	2,426	2,401	2,350	2,296	
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714	2,671	2,604	2,554	2,515	2,484	2,459	2,380	2,339	2,314	2,261	2,206	
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646	2,602	2,534	2,484	2,445	2,413	2,388	2,308	2,266	2,240	2,187	2,131	
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,707	2,641	2,588	2,544	2,475	2,424	2,385	2,353	2,328	2,247	2,204	2,178	2,123	2,066	
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538	2,494	2,425	2,373	2,333	2,302	2,276	2,194	2,151	2,124	2,068	2,010	
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494	2,450	2,381	2,329	2,289	2,257	2,230	2,148	2,104	2,077	2,020	1,960	
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456	2,412	2,342	2,290	2,250	2,217	2,191	2,107	2,063	2,035	1,978	1,917	
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423	2,378	2,308	2,256	2,215	2,182	2,155	2,071	2,026	1,999	1,940	1,878	
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393	2,348	2,278	2,225	2,184	2,151	2,124	2,039	1,994	1,966	1,907	1,843	
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,488	2,420	2,366	2,321	2,250	2,197	2,156	2,123	2,096	2,010	1,965	1,936	1,876	1,812	
22	4,301	3,443	3,048	2,817	2,661	2,549	2,464	2,396	2,342	2,297	2,226	2,173	2,131	2,098	2,071	1,984	1,938	1,909	1,849	1,783	
23	4,279	3,421	3,026	2,795	2,639	2,527	2,442	2,374	2,320	2,275	2,204	2,150	2,109	2,075	2,048	1,961	1,914	1,885	1,823	1,757	
24	4,260	3,403	3,008	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300	2,255	2,183	2,130	2,088	2,054	2,027	1,939	1,892	1,863	1,800	1,733	
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282	2,236	2,165	2,111	2,069	2,035	2,007	1,919	1,872	1,842	1,779	1,711	
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,265	2,220	2,148	2,094	2,052	2,018	1,990	1,901	1,853	1,823	1,760	1,691	
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2,250	2,204	2,132	2,078	2,036	2,002	1,974	1,884	1,836	1,806	1,742	1,672	
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236	2,190	2,118	2,064	2,021	1,987	1,959	1,869	1,820	1,790	1,725	1,654	
29	4,183	3,327	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223	2,177	2,104	2,050	2,007	1,973	1,945	1,854	1,806	1,775	1,710	1,638	
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,420	2,334	2,266	2,211	2,165	2,092	2,037	1,995	1,960	1,932	1,841	1,792	1,761	1,695	1,622	
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,249	2,180	2,124	2,077	2,003	1,948	1,904	1,868	1,839	1,747	1,693	1,660	1,589	1,509	
50	4,034	3,183	2,790	2,557	2,400	2,286	2,200	2,130	2,073	2,026	1,952	1,895	1,850	1,814	1,784	1,687	1,634	1,599	1,525	1,438	
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,168	2,097	2,040	1,993	1,917	1,860	1,815	1,778	1,748	1,649	1,594	1,559	1,481	1,389	
70	3,978	3,127	2,735	2,503	2,346	2,231	2,143	2,074	2,017	1,969	1,893	1,836	1,790	1,753	1,722	1,622	1,566	1,530	1,450	1,353	
80	3,960	3,110	2,719	2,486	2,329	2,214	2,126	2,056	1,999	1,951	1,875	1,817	1,772	1,734	1,703	1,602	1,545	1,508	1,426	1,325	
90	3,947	3,097	2,706	2,473	2,316	2,201	2,113	2,043	1,986	1,938	1,861	1,803	1,757	1,720	1,688	1,586	1,528	1,491	1,407	1,302	
100	3,936	3,087	2,695	2,463	2,305	2,191	2,102	2,032	1,975	1,927	1,850	1,792	1,746	1,708	1,676	1,573	1,515	1,477	1,392	1,283	
∞		3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	2,010	1,938	1,880	1,831	1,752	1,692	1,644	1,604	1,571	1,459	1,394	1,350	1,243	1,000

		1 - α = 0,990																			
V ₂	V ₁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	50	100	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5929	5981	6023	6056	6107	6143	6170	6192	6209	6261	6287	6303	6334	6366	
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,75	99,78	99,80	99,83	99,86	99,88	99,89	99,90	99,93	99,95	99,96	99,98	99,50	
3	34,11	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,05	26,92	26,83	26,75	26,69	26,50	26,41	26,35	26,24	26,13	
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,25	14,15	14,08	14,02	13,84	13,75	13,69	13,58	13,46	
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,888	9,770	9,680	9,610	9,553	9,379	9,291	9,238	9,130	9,020	
6	13,74	10,92	9,779	9,148	8,746	8,466	8,260	8,102	7,976	7,874	7,718	7,605	7,519	7,451	7,396	7,229	7,143	7,091	6,987	6,880	
7	12,25	9,55	8,451	7,847	7,460	7,191	6,993	6,840	6,719	6,620	6,469	6,359	6,275	6,209	6,155	5,992	5,908	5,858	5,751	5,650	
8	11,26	8,65	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178	6,029	5,911	5,814	5,667	5,559	5,477	5,412	5,359	5,198	5,116	5,065	4,961	4,859	
9	10,56	8,02	6,992	6,422	6,057	5,802	5,613	5,467	5,351	5,257	5,111	5,005	4,924	4,860	4,808	4,649	4,567	4,516	4,414	4,311	
10	10,04	7,56	6,552	5,994	5,636	5,386	5,200	5,057	4,942	4,849	4,706	4,601	4,520	4,457	4,405	4,246	4,165	4,115	4,013	3,909	
11	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,886	4,744	4,631	4,539	4,397	4,293	4,213	4,150	4,099	3,941	3,859	3,809	3,707	3,602	
12	9,330	6,927	5,952	5,412	5,064	4,820	4,639	4,499	4,387	4,296	4,155	4,052	3,972	3,909	3,858	3,701	3,619	3,569	3,466	3,361	
13	9,074	6,701	5,739	5,205	4,862	4,620	4,441	4,302	4,191	4,100	3,960	3,857	3,778	3,715	3,664	3,507	3,425	3,375	3,272	3,165	
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,278	4,140	4,030	3,939	3,800	3,697	3,619	3,556	3,505	3,347	3,266	3,215	3,112	3,004	
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,141	4,004	3,895	3,805	3,666	3,564	3,485	3,423	3,372	3,214	3,132	3,081	2,977	2,868	
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	4,026	3,890	3,780	3,691	3,553	3,451	3,372	3,310	3,259	3,101	3,018	2,967	2,863	2,753	
17	8,400	6,112	5,185	4,669	4,336	4,101	3,927	3,791	3,682	3,593	3,455	3,353	3,275	3,212	3,161	3,003	2,920	2,869	2,764	2,653	
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,248	4,015	3,841	3,705	3,597	3,508	3,371	3,269	3,190	3,128	3,077	2,918	2,835	2,784	2,678	2,566	
19	8,185	5,926	5,010	4,500	4,171	3,939	3,765	3,631	3,522	3,434	3,297	3,195	3,116	3,054	3,003	2,844	2,761	2,709	2,602	2,489	
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,699	3,564	3,457	3,368	3,231	3,130	3,051	2,989	2,938	2,778	2,695	2,643	2,535	2,421	
21	8,016	5,780	4,874	4,369	4,042	3,812	3,640	3,506	3,398	3,310	3,173	3,071	2,993	2,931	2,880	2,720	2,636	2,584	2,475	2,360	
22	7,945	5,719	4,817	4,313	3,988	3,758	3,587	3,453	3,346	3,258	3,121	3,019	2,941	2,879	2,827	2,667	2,583	2,531	2,422	2,305	
23	7,881	5,664	4,765	4,264	3,939	3,710	3,539	3,406	3,299	3,211	3,074	2,973	2,894	2,832	2,780	2,620	2,535	2,483	2,373	2,256	
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,496	3,363	3,256	3,168	3,032	2,930	2,852	2,789	2,738	2,577	2,492	2,439	2,329	2,211	
25	7,770	5,568	4,675	4,177	3,855	3,627	3,457	3,324	3,217	3,129	2,993	2,892	2,813	2,751	2,699	2,538	2,453	2,400	2,289	2,169	
26	7,721	5,526	4,636	4,140	3,818	3,591	3,421	3,288	3,182	3,094	2,958	2,857	2,778	2,715	2,664	2,503	2,417	2,364	2,252	2,131	
27	7,677	5,488	4,601	4,106	3,785	3,558	3,388	3,256	3,149	3,062	2,926	2,824	2,746	2,683	2,632	2,470	2,384	2,330	2,218	2,097	
28	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,358	3,226	3,120	3,032	2,896	2,795	2,716	2,653	2,602	2,440	2,354	2,300	2,187	2,064	
29	7,598	5,420	4,538	4,045	3,725	3,499	3,330	3,198	3,092	3,005	2,868	2,767	2,689	2,626	2,574	2,412	2,325	2,271	2,158	2,034	
30	7,562	5,390	4,510	4,018	3,699	3,473	3,304	3,173	3,067	2,979	2,843	2,742	2,663	2,600	2,549	2,386	2,299	2,245	2,131	2,006	
40	7,314	5,179	4,312	3,828	3,514	3,291	3,124	2,993	2,888	2,801	2,665	2,563	2,484	2,421	2,369	2,203	2,114	2,058	1,938	1,805	
50	7,170	5,056	4,199	3,720	3,408	3,186	2,990	2,858	2,753	2,666	2,530	2,428	2,349	2,286	2,234	2,068	1,978	1,921	1,801	1,667	
60	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953	2,823	2,718	2,632	2,496	2,394	2,315	2,251	2,198	2,032	1,936	1,877	1,749	1,601	
70	7,011	4,922	4,074	3,600	3,291	3,071	2,906	2,777	2,672	2,585	2,450	2,348	2,268	2,204	2,150	1,980	1,886	1,826	1,695	1,540	
80	6,962	4,881	4,036	3,563	3,255	3,036	2,871	2,742	2,637	2,551	2,415	2,313	2,233	2,169	2,115	1,944	1,849	1,788	1,655	1,494	
90	6,925	4,849	4,007	3,535	3,228	3,009	2,844	2,715	2,611	2,524	2,389	2,286	2,206	2,142	2,088	1,916	1,820	1,759	1,623	1,457	
100	6,895	4,824	3,983	3,513	3,206	2,988	2,823	2,694	2,590	2,503	2,368	2,265	2,185	2,120	2,067	1,893	1,797	1,735	1,598	1,427	
∞	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,639	2,511	2,407	2,321	2,185	2,082	2,000	1,934	1,878	1,696	1,592	1,523	1,388	1,000	

		1 - α = 0,995																					
	V ₁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	40	50	100	∞		
V ₂	1	16210	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23926	24091	24225	24427	24572	24682	24768	24836	25044	25149	25211	25338	25465		
	2	198,5	199,0	199,3	199,5	199,6	199,7	199,7	199,8	199,8	199,8	199,8	199,9	199,9	199,9	199,9	199,9	200,0	200,0	200,0	199,5		
	3	55,55	49,80	47,46	46,19	45,39	44,84	44,43	44,12	43,88	43,68	43,38	43,17	43,00	42,88	42,77	42,46	42,30	42,21	42,02	41,83		
	4	31,33	26,28	24,26	23,15	22,46	21,97	21,62	21,35	21,14	20,97	20,70	20,51	20,37	20,26	20,17	19,89	19,75	19,67	19,50	19,32		
	5	22,78	18,31	16,53	15,56	14,94	14,51	14,20	13,96	13,77	13,62	13,38	13,21	13,09	12,98	12,90	12,66	12,53	12,45	12,30	12,14		
	6	18,635	14,544	12,916	12,028	11,464	11,073	10,786	10,566	10,391	10,250	10,034	9,877	9,758	9,664	9,589	9,358	9,241	9,170	9,026	8,879		
	7	16,236	12,404	10,882	10,050	9,522	9,155	8,885	8,678	8,514	8,380	8,176	8,028	7,915	7,826	7,754	7,534	7,422	7,354	7,210	7,076		
	8	14,688	11,042	9,596	8,805	8,302	7,952	7,694	7,496	7,339	7,211	7,015	6,872	6,763	6,678	6,608	6,396	6,288	6,222	6,084	5,951		
	9	13,614	10,107	8,717	7,956	7,471	7,134	6,885	6,693	6,541	6,417	6,227	6,089	5,983	5,899	5,832	5,625	5,519	5,452	5,321	5,188		
	10	12,826	9,427	8,081	7,343	6,872	6,545	6,302	6,116	5,968	5,847	5,661	5,526	5,422	5,340	5,274	5,071	4,965	4,901	4,771	4,639		
	11	12,226	8,912	7,600	6,881	6,422	6,102	5,865	5,682	5,537	5,418	5,236	5,103	5,001	4,921	4,855	4,654	4,550	4,487	4,358	4,226		
	12	11,754	8,510	7,226	6,521	6,071	5,757	5,525	5,345	5,202	5,085	4,906	4,774	4,674	4,594	4,530	4,331	4,228	4,165	4,036	3,904		
	13	11,373	8,186	6,926	6,233	5,791	5,482	5,253	5,076	4,935	4,820	4,643	4,513	4,413	4,334	4,270	4,073	3,970	3,908	3,779	3,647		
	14	11,060	7,922	6,680	5,998	5,562	5,257	5,031	4,856	4,717	4,603	4,428	4,299	4,200	4,122	4,058	3,862	3,760	3,697	3,569	3,436		
	15	10,798	7,701	6,476	5,803	5,372	5,071	4,847	4,674	4,536	4,423	4,250	4,122	4,024	3,946	3,882	3,687	3,585	3,522	3,394	3,260		
	16	10,575	7,514	6,303	5,638	5,212	4,913	4,692	4,521	4,384	4,272	4,099	3,972	3,875	3,797	3,734	3,539	3,437	3,375	3,246	3,112		
	17	10,384	7,354	6,155	5,497	5,075	4,779	4,559	4,389	4,253	4,142	3,971	3,844	3,747	3,670	3,607	3,412	3,311	3,248	3,119	2,984		
	18	10,218	7,215	6,028	5,375	4,956	4,663	4,445	4,276	4,141	4,030	3,860	3,734	3,637	3,560	3,498	3,303	3,201	3,139	3,009	2,873		
	19	10,073	7,093	5,916	5,268	4,853	4,561	4,345	4,177	4,043	3,933	3,763	3,638	3,541	3,464	3,402	3,208	3,106	3,043	2,913	2,776		
	20	9,944	6,986	5,818	5,174	4,762	4,472	4,257	4,090	3,956	3,847	3,678	3,553	3,457	3,380	3,318	3,123	3,021	2,959	2,828	2,690		
	21	9,830	6,891	5,730	5,091	4,681	4,393	4,179	4,013	3,880	3,771	3,602	3,478	3,382	3,305	3,243	3,049	2,947	2,884	2,753	2,614		
	22	9,727	6,806	5,652	5,017	4,609	4,322	4,109	3,944	3,812	3,703	3,535	3,411	3,315	3,239	3,176	2,982	2,880	2,817	2,685	2,546		
	23	9,635	6,730	5,582	4,950	4,544	4,259	4,047	3,882	3,750	3,642	3,475	3,351	3,255	3,179	3,116	2,922	2,820	2,756	2,624	2,484		
	24	9,551	6,661	5,519	4,890	4,486	4,202	3,990	3,826	3,695	3,587	3,420	3,296	3,201	3,125	3,062	2,868	2,765	2,702	2,569	2,428		
	25	9,475	6,598	5,461	4,835	4,433	4,150	3,939	3,776	3,645	3,537	3,370	3,247	3,151	3,075	3,013	2,819	2,716	2,652	2,519	2,377		
	26	9,406	6,541	5,409	4,785	4,384	4,103	3,893	3,730	3,599	3,492	3,325	3,202	3,107	3,031	2,968	2,774	2,671	2,607	2,473	2,330		
	27	9,342	6,488	5,361	4,740	4,340	4,059	3,850	3,687	3,557	3,450	3,284	3,161	3,066	2,990	2,928	2,733	2,630	2,565	2,431	2,287		
	28	9,284	6,440	5,317	4,698	4,300	4,020	3,811	3,649	3,519	3,412	3,246	3,123	3,028	2,952	2,890	2,695	2,592	2,527	2,392	2,247		
	29	9,230	6,396	5,276	4,659	4,262	3,983	3,775	3,613	3,483	3,377	3,211	3,088	2,993	2,917	2,855	2,660	2,557	2,492	2,357	2,210		
	30	9,180	6,355	5,239	4,623	4,228	3,949	3,742	3,580	3,450	3,344	3,179	3,056	2,961	2,885	2,823	2,628	2,524	2,459	2,323	2,176		
	40	8,828	6,066	4,976	4,374	3,986	3,713	3,509	3,350	3,222	3,117	2,953	2,831	2,737	2,661	2,598	2,401	2,296	2,230	2,088	1,932		
	50	8,626	5,902	4,826	4,232	3,848	3,578	3,376	3,219	3,092	2,988	2,825	2,703	2,609	2,533	2,470	2,272	2,164	2,097	1,951	1,786		
	60	8,494	5,795	4,729	4,140	3,760	3,492	3,291	3,134	3,008	2,904	2,742	2,620	2,526	2,450	2,387	2,187	2,079	2,010	1,861	1,689		
	70	8,402	5,720	4,661	4,076	3,698	3,431	3,232	3,075	2,950	2,846	2,684	2,563	2,468	2,392	2,329	2,128	2,019	1,949	1,797	1,618		
	80	8,334	5,665	4,611	4,029	3,652	3,387	3,188	3,032	2,907	2,803	2,641	2,520	2,425	2,349	2,286	2,084	1,974	1,903	1,748	1,563		
	90	8,282	5,623	4,573	3,992	3,617	3,352	3,154	2,999	2,874	2,770	2,608	2,487	2,393	2,316	2,253	2,051	1,939	1,868	1,711	1,520		
	100	8,240	5,589	4,542	3,963	3,589	3,325	3,127	2,972	2,847	2,744	2,583	2,461	2,367	2,290	2,227	2,024	1,912	1,840	1,681	1,485		
	∞	7,879	5,298	4,279	3,715	3,350	3,091	2,897	2,744	2,621	2,519	2,358	2,237	2,142	2,064	2,000	1,789	1,669	1,590	1,402	1,000		

STUDENT (t)-Verteilung:

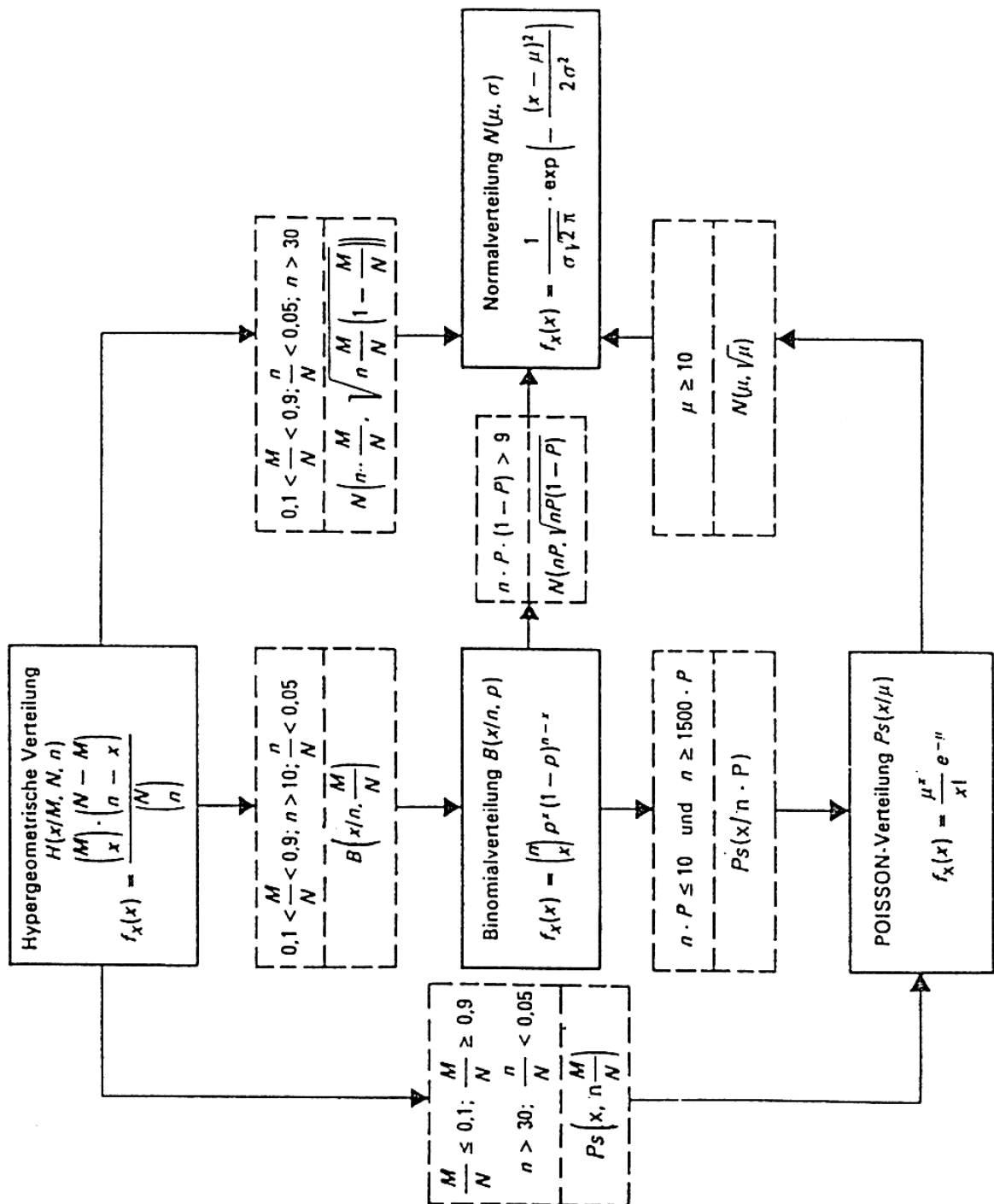
Für verschiedene Freiheitsgrade ν und für verschiedene Wahrscheinlichkeiten $P(T < t) = 1 - \alpha$ sind die entsprechenden t-Werte tabelliert (Quelle: J. Schwarze, Grundlagen der Statistik II, 1993, S. 308 - 309)



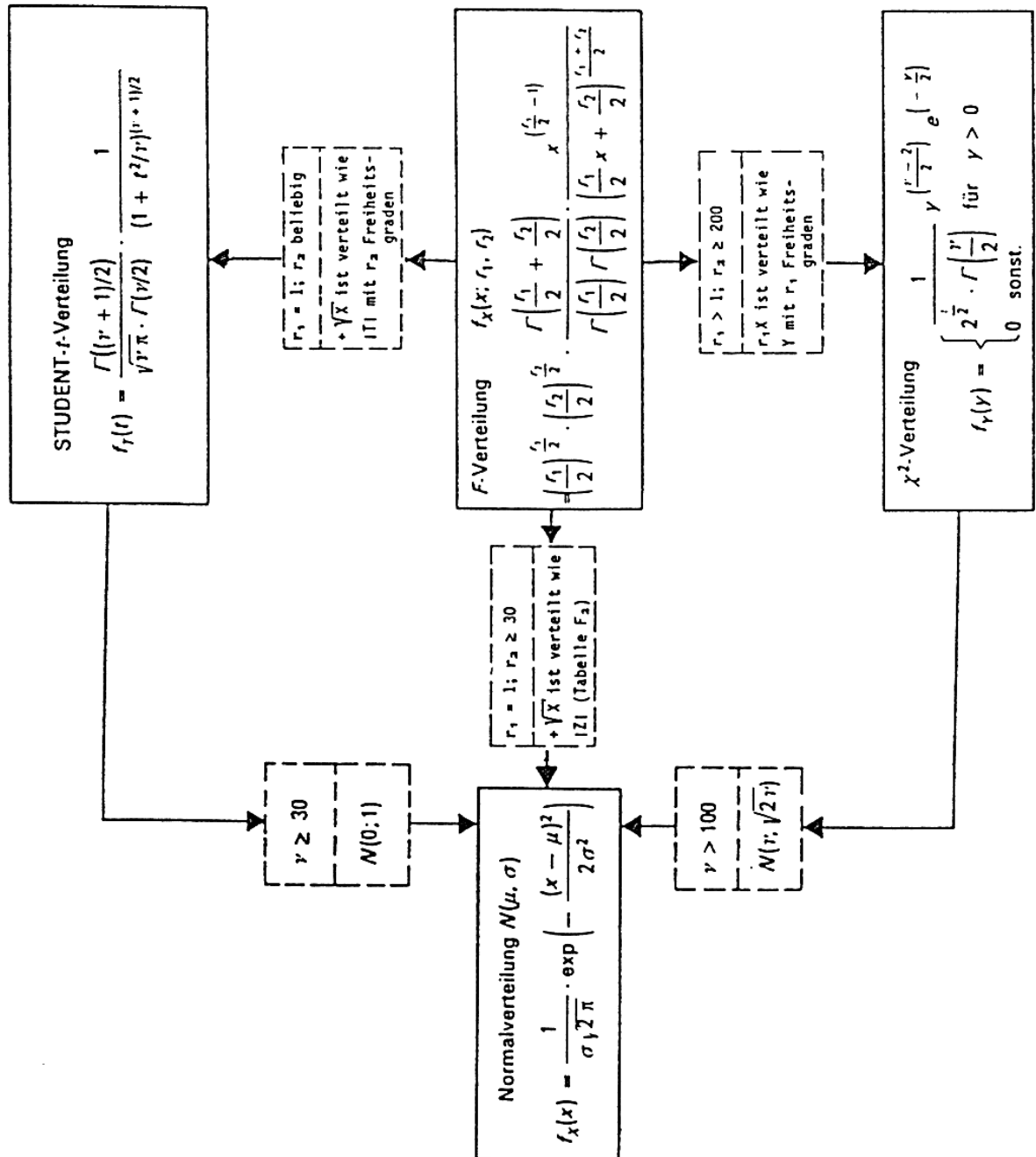
ν	$1 - \alpha$										
	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	0,9500	0,9750	0,9900	0,9950	0,9990	0,9995	
1	0,3249	0,7265	1,3764	3,0777	6,3137	12,7062	31,8205	63,6568	318,3127	636,5894	
2	0,2887	0,6172	1,0607	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	22,3273	31,5983	
3	0,2767	0,5844	0,9785	1,6377	2,3534	3,1825	4,5407	5,8409	10,2146	12,9238	
4	0,2707	0,5686	0,9410	1,5332	2,1318	2,7763	3,7470	4,6041	7,1732	8,6102	
5	0,2672	0,5594	0,9195	1,4759	2,0150	2,5706	3,3648	4,0322	5,8934	6,8688	
6	0,2648	0,5534	0,9057	1,4398	1,9432	2,4469	3,1426	3,7074	5,2076	5,9588	
7	0,2632	0,5491	0,8960	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	4,7851	5,4079	
8	0,2619	0,5459	0,8889	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	4,5007	5,0411	
9	0,2610	0,5435	0,8834	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,2968	4,7808	
10	0,2602	0,5415	0,8791	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,1437	4,5868	
11	0,2596	0,5399	0,8755	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,0247	4,4369	
12	0,2590	0,5386	0,8726	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178	
13	0,2586	0,5375	0,8702	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,8520	4,2208	
14	0,2582	0,5366	0,8681	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,7874	4,1404	
15	0,2579	0,5357	0,8662	1,3406	1,7530	2,1314	2,6025	2,9467	3,7328	4,0727	
16	0,2576	0,5350	0,8647	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,6862	4,0150	
17	0,2573	0,5344	0,8633	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,6458	3,9651	
18	0,2571	0,5338	0,8620	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,6105	3,9216	
19	0,2569	0,5333	0,8610	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,5794	3,8834	
20	0,2567	0,5329	0,8600	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,5518	3,8495	
21	0,2566	0,5325	0,8591	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,5272	3,8193	
22	0,2564	0,5321	0,8583	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,5050	3,7921	
23	0,2563	0,5317	0,8575	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676	
24	0,2562	0,5314	0,8569	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,4668	3,7454	
25	0,2561	0,5312	0,8562	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251	

v	1 - α									
	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000	0,9500	0,9750	0,9900	0,9950	0,9990	0,9995
26	0,2560	0,5309	0,8557	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,4350	3,7066
27	0,2559	0,5306	0,8551	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,4210	3,6896
28	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,3962	3,6594
30	0,2556	0,5300	0,8538	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,3852	3,6459
31	0,2555	0,5298	0,8534	1,3095	1,6955	2,0395	2,4528	2,7440	3,3749	3,6334
32	0,2555	0,5297	0,8530	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,3653	3,6218
33	0,2554	0,5295	0,8526	1,3077	1,6924	2,0345	2,4448	2,7333	3,3563	3,6109
34	0,2553	0,5294	0,8523	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,3479	3,6007
35	0,2553	0,5292	0,8520	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,3400	3,5911
36	0,2552	0,5291	0,8517	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	3,3326	3,5821
37	0,2552	0,5289	0,8514	1,3049	1,6871	2,0262	2,4314	2,7154	3,3256	3,5737
38	0,2551	0,5288	0,8512	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	3,3190	3,5657
39	0,2551	0,5287	0,8509	1,3036	1,6849	2,0227	2,4258	2,7079	3,3128	3,5581
40	0,2550	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,3069	3,5509
41	0,2550	0,5285	0,8505	1,3025	1,6829	2,0195	2,4208	2,7012	3,3013	3,5442
42	0,2550	0,5284	0,8503	1,3020	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981	3,2960	3,5377
43	0,2549	0,5283	0,8501	1,3016	1,6811	2,0167	2,4163	2,6951	3,2909	3,5316
44	0,2549	0,5282	0,8499	1,3011	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	3,2861	3,5258
45	0,2549	0,5281	0,8497	1,3006	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,2815	3,5202
46	0,2548	0,5281	0,8495	1,3002	1,6787	2,0129	2,4102	2,6870	3,2771	3,5149
47	0,2548	0,5280	0,8493	1,2998	1,6779	2,0117	2,4083	2,6846	3,2729	3,5099
48	0,2548	0,5279	0,8492	1,2994	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822	3,2689	3,5051
49	0,2547	0,5278	0,8490	1,2991	1,6765	2,0096	2,4049	2,6800	3,2651	3,5004
50	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,2614	3,4960
60	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,2317	3,4602
70	0,2543	0,5268	0,8468	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,2108	3,4350
80	0,2542	0,5265	0,8461	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,1953	3,4163
90	0,2541	0,5263	0,8456	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,1833	3,4019
100	0,2540	0,5261	0,8452	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,1737	3,3905

Übersicht zur Approximation von Verteilungen mit Approximationskriterien (Quelle: J. Schwarze, Grundlagen der Statistik II, 1993, S. 116)



Übersicht zur Approximation von Verteilungen mit Approximationskriterien (Quelle: J. Schwarze, Grundlagen der Statistik II, 1993, S. 117)



Literaturverzeichnis

The icon consists of the word "Lit" in a stylized, italicized serif font, enclosed within a square border with rounded corners.

Ausgewählte Literatur, Weiterstöbern empfohlen

A EINIGE STANDARDWERKE

- Anderson, Davi, R., Sweeney, Dennis, J., Williams, Thomas, A., Freeman, Jim und Essie Shoesmith (2007), Statistics for Business and Economics, Thomson Publisher, London (mit CD)
- Anderson, O., Popp, W., Schaffranek, M., Steinmetz, D. und H. Stenger (1997), Schätzen und Testen, Springer Verlag, 2. Auflage, Berlin
- Bamberg, G. und F. Baur (2002), Statistik, R. Oldenbourg Verlag, 12. Auflage, München
- Basler, H. (1994), Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und statistische Methodenlehre, Physica Verlag, 11. Auflage, Heidelberg
- Bleymüller, J., Gehlert, G. und H. Gülicher (2004), Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, Vahlen, 14. Auflage, München
- Bomsdorf, E. (2002), Induktive Statistik – Eine Einführung, Verlag Josel Eul Verlag, 8. Auflage, Bergisch Gladbach/Köln
- Bortz, I. (1999), Statistik für Sozialwissenschaftler, 5. Auflage, Berlin-New York
- Bosch, K. (1998), Statistik-Taschenbuch, R. Oldenbourg Verlag, 3. Auflage, München/Wien
- Conover, W. J. (1998), Practical Nonparametric Statistics, John Wiley & Sons, 3. Auflage, New York
- Dillmann, R. (1990), Statistik II: Induktive Statistik, Physica Verlag, Heidelberg
- Edwards, A. W. F. (1972), Likelihood – An Account of the Statistical Concept of Likelihood and its Application to Scientific Inference, Cambridge University Press, Cambridge/Melbourne
- Gale, W. A. (1986), Artificial Intelligence and Statistics, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (Mass.)/San Juan
- Gonick, L. und Smith, W. (1993), The Cartoon Guide to Statistics, New York
- Greene, W. H. (2003), Econometric Analysis, Prentice Hall, 5. Auflage, New York/London
- Greene, W. H. (1992), ET – The Econometrics Toolkit, Version 3.0, User's Guide, New York
- Hansen, G. (1985), Methodenlehre der Statistik, Vahlen, 3. Auflage, München
- Hochstädter, D. (1996), Statistische Methodenlehre, Verlag Harri Deutsch, 8. Auflage, Frankfurt am Main

- Hujer, R. (1991), Statistik – Manuskript zur Vorlesung, Frankfurt
- Kreyszig, E. (1979), Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Vandenhoeck & Ruprecht, 7. Auflage, Göttingen
- Kriz, J. (1983), Statistik in den Sozialwissenschaften, 4. Auflage, studium rororo, Reinbek bei Hamburg
- Leiner, B. (1994), Stichprobentheorie, R. Oldenbourg Verlag, 3. Auflage, München
- Malinvaud, E. (2000), Statistical Methods in Econometrics, 3rd ed., American Elsevier, New York
- Merz, J. (2015), Statistik II – Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktive Statistik, Skriptum zur Vorlesung, 11. Auflage, Lüneburg
- Pfanzagl, J. (1974), Allgemeine Methodenlehre der Statistik – Teil II, Walter de Gruyter, Berlin/New York
- Rinne, H. und G. Ickler (1986), Grundstudium Statistik, Verlag für Wirtschaftsskripten, 2. Auflage, München
- Rüger, B. (2000), Induktive Statistik: Einführung für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler, R. Oldenbourg Verlag, München
- Sachs, L. (2004), Angewandte Statistik – Anwendung statistischer Methoden, Springer Verlag, 11. Auflage, Berlin
- Sahner, H. (2002), Schließende Statistik, VS Verlag für Sozialwissenschaften, 5. Auflage, Stuttgart
- Schaich, E. und A. Hamerle (1984), Verteilungsfreie statistische Prüfverfahren - Eine anwendungsorientierte Darstellung, Springer, Berlin
- Scharnbacher, K. (2004), Statistik im Betrieb – Lehrbuch mit praktischen Beispielen, Gabler Verlag, 14. Auflage, Wiesbaden
- Schwarze, J. (1977), Bibliographie zur Statistik in der Weiterbildung, Pädagogische Arbeitsstelle des Deutschen Volkshochschulverbandes, Holzhausenstr. 21, 6000 Frankfurt, 2. Auflage, Frankfurt/Bonn
- Schwarze, J. (2009), Grundlagen der Statistik II – Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktive Statistik, Verlag NWB, 9. Auflage, Herne/Berlin
- Siegel, S. (1987), Nichtparametrische Statistische Methoden, Methoden in der Psychologie, Band 4, Fachbuchhandlung für Psychologie, 3. Auflage, Eschborn (Übersetzung aus dem amerikanischen von S. Siegel (1956), Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences, Mc Graw-Hill, New York)
- Spanos, A. (1986), Statistical Foundations of Econometric Modelling, Cambridge University Press, Cambridge/Sydney
- Wetzel, W. (1973), Statistische Grundausbildung für Wirtschaftswissenschaftler – Teil II, Walter de Gruyter, Berlin
- Yamane, T. (1987), Statistik – Ein einführendes Lehrbuch, Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt, Teil I und II
- Yang, M. C. K. und D. Robinson (1986), Understanding and Learning Statistics by Computer, World Scientific, Singapore

B BÜCHER MIT ÜBUNGSAUFGABEN

- Bamberg, G. und F. Baur (2004), Statistik Arbeitsbuch: Übungsaufgaben, Fallstudien, Lösungen, R. Oldenbourg Verlag, 7. Auflage, München
- Bihn, W. R. und K. A. Schäffer (1986), Übungsaufgaben zur Grundausbildung in Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, J.C. Witsch Nachf., Köln
- Hartung, J., Elpelt, B. und K.-H. Klösner (2002), Statistik – Lehrbuch mit Übungsaufgaben, R. Oldenbourg Verlag, München
- Hartung, J. und B. Heine (2004), Statistik Übungen: Induktive Statistik, R. Oldenbourg Verlag, 4. Auflage, München
- Hochstädter, D. (1993), Aufgaben mit Lösungen zur statistischen Methodenlehre, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main
- Lippe von der, P. (2004), Klausurtraining in Statistik, R. Oldenbourg Verlag, 6. Auflage, München
- Merz, J. (1997), Statistik II – Wahrscheinlichkeitsrechnung und induktive Statistik, Übungs- und Klausuraufgaben mit Lösungen, Lüneburg
- Spiegel, M. R. (1999), Statistik, Mc Graw Hill, Düsseldorf
- Vogel, F. (2000), Beschreibende und schließende Statistik – Aufgaben und Beispiele, R. Oldenbourg Verlag, 12. Auflage, München

C FORMEL- UND TABELLENWERKE

- Bihn, E. R. und K. A. Schäffer (1987), Formeln und Tabellen zur Grundausbildung in Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, J. C. Witsch Nachf., Köln
- Bleymüller, J. und G. Gehlert (1985), Statistische Formeln, Tabellen und Programme, Verlag Franz Vahlen, München
- Bohley, P. (1991), Formeln, Rechenregeln und Tabellen zur Statistik, R. Oldenbourg Verlag, 4. Auflage, München
- Rinne, H. (1988), Statistische Formelsammlung, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main
- Vogel, F. (1991), Beschreibende und schließende Statistik – Formeln, Definitionen, Erläuterungen, Stichwörter und Tabellen, R. Oldenbourg Verlag, 6. Auflage, München